Tema 9

Ejercicios resueltos

09.1. Aplicando el teorema del valor medio integral y con la ayuda de una representación gráfica de la función, calcular el valor aproximado de las integrales que se indican:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \frac{1}{100-x^6} dx ; \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{3 \cos(x)}{75-x^4} dx ; \quad \text{c) } \int_0^1 \left(2 + \frac{0.1x^2}{\sqrt{1+0.1x^4}} \right) dx$$

09.2. Calcular la derivada de las funciones siguientes, precisando su campo de existencia:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_2^x \frac{1+2t^2}{t^3} dt & \text{b) } \int_x^3 \frac{1}{1+t^4} dt \\ \text{c) } \int_0^{\cos^2(x)} \exp(-2t^2) dt & \text{d) } \int_2^{e^x} \frac{\log(1+t)}{2t^2} dt \end{array}$$

09.3. Se considera una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en su dominio, con derivada estrictamente positiva y tal que $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Estudiar la existencia de extremos locales de la función $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \int_0^{x^2-6x+8} f(t) dt$$

09.4. Se considera la función real de variable real definida por:

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\log(1+t)}{1+3t^3} dt$$

- 1) Razonar que esta función es derivable y calcular la función derivada $DF(x)$.
- 2) Razonar que $DF(x)$ es una función par.
- 3) Calcular la integral de $DF(x)$ en el intervalo $[-1,1]$ aplicando el método de los trapecios con un paso $h = 0.2$.

09.5. Calcular el área de los siguientes subconjuntos del plano:

- a) limitado por la parábola $3y - x^2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 5 = 0$.
- b) limitado por las circunferencias $x^2 + y^2 - 5 = 0$ y $x^2 + y^2 - 2\sqrt{5}x = 0$.
- c) limitado por las parábolas $y^2 - 3y + x = 0$ y $y^2 - 3y - x + 3 = 0$.

09.6. Calcular el área del subconjunto del plano limitado por las curvas planas $y - 2xe^{-x} = 0$ y $y - 2x^2e^{-x} = 0$. Calcular el volumen generado por este subconjunto cuando se hace girar en torno al eje de abscisas.

09.7. Un sólido tiene la forma siguiente: su base es un círculo de radio R y toda sección del sólido perpendicular a un diámetro fijo de la base es un triángulo equilátero. Calcular el volumen de este sólido.

09.8. Un sólido está formado por una base circular de radio R y toda sección del sólido perpendicular a un diámetro fijo de la base es un cuadrado con un semicírculo en la parte superior. Calcular el volumen de este sólido.

09.9. Calcular el volumen generado por la rotación del subconjunto del plano limitado por la curva $y - 2e^{-|x|} = 0$, las rectas $x - 2 = 0$ y $x + 2 = 0$ y el eje de abscisas, cuando se hace girar:

- a) en torno del eje OX;
- b) en torno del eje OY.

09.10. Un depósito tiene la forma de un cilindro recto circular de radio R y altura H y está lleno de agua. En el centro de la base hay un agujero de sección S que inicialmente está tapado. Si se saca el tapón, calcular el tiempo que tarda en vaciarse el depósito. Aplicación en el caso: $R = 1\text{m}$, $H = 2\text{m}$, $S = 0.5\text{cm}^2$.

09.11. Calcular el perfil que ha de tener un depósito de revolución, de tal manera que la velocidad de descenso del nivel de líquido sea constante (reloj de agua).

09.12. Calcular la longitud del arco de parábola $y = 0.51 + 0.42x + 0.35x^2$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

09.13. Se consideran los subconjuntos del plano:

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}; \quad B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x\}; \quad C = A \cap B$$

- Calcular la longitud de la frontera de C .
- Calcular el área del conjunto C .
- Calcular el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene haciendo rotar el conjunto C alrededor del eje de ordenadas.

09.14. Se considera el siguiente subconjunto del plano:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq f(x) = \log(x+1)\}$$

- Representar gráficamente este subconjunto.
Calcular analíticamente y por un método aproximado:
- el volumen del sólido generado por la rotación de este subconjunto alrededor del eje OX .
- la longitud del arco de curva $y = f(x)$ en el intervalo $[0,1]$.

09.15. Se considera el subconjunto del plano

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, f_2(x) \leq y \leq f_1(x)\}$$

donde $f_2(x) = e^x - 1$ y $f_1(x)$ es la recta que pasa por los puntos $P(0,e)$ y $Q(1, f_2(1))$.

Se pide:

- Representar gráficamente este subconjunto y calcular su área.
- Calcular el volumen generado por la rotación de este subconjunto alrededor del eje de ordenadas.

09.16. Calcular el volumen del cuerpo generado por la rotación alrededor del eje de ordenadas del subconjunto del plano limitado por las curvas planas $x^2 + y^2 - 9 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x = 0$. Haced una representación gráfica.

09.17. Se consideran las curvas planas $C1: x^2 = 4y$ y $C2: y = \frac{1}{x^2 + 3}$.

- 1) Representar esquemáticamente el recinto limitado por estas dos curvas.
- 2) Calcular el área del recinto limitado por las curvas $C1$ y $C2$.
- 3) Calcular el volumen del cuerpo generado por rotación del recinto limitado por las curvas $C1$ y $C2$ en torno al eje OY .

09.18. Se considera $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{\sqrt{x-1}} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 2 + 5(x-2)^2 e^{2-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Hacer una representación gráfica de la función.
- b) Estudiar si es finita el área limitada por la gráfica de la función y el eje de abscisas en el intervalo $]-\infty, 2]$; en caso afirmativo, calculadla.
- c) Calcular el área limitada por la gráfica de la función en el intervalo $[2, 10]$.

09.19. Estudiar la convergencia de las integrales impropias siguientes y calcularlas cuando sea posible:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx & \text{b) } \int_1^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ \text{c) } \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx & \text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx \end{array}$$

09.20. Se considera el conjunto $A = \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{x}, x \geq 1 \right\}$. Calcular el área y el volumen de la figura generada cuando se hace rotar el conjunto en torno del eje de abscisas.