

Tema 8

Ejercicios resueltos

08.1. Calcular los extremos locales y absolutos

a) de la función $f(x) = 1 + \frac{|9 - x^2|}{2}$ en el intervalo $[-6, 4]$.

b) de la función $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ en el intervalo $[-10, 10]$.

08.2. Se considera la ecuación $x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$. Indicar intervalos en que pueda haber una solución de la ecuación y calculadla aproximadamente en un caso, dando una cota superior del error cometido.

08.3. Razonar que la ecuación $x^2 = 18 \log(x)$ tiene una única solución en el intervalo $[1, e]$ y calcularla.

08.4. Razonar que la ecuación $e^{x-1} - \frac{1}{x+1} = 0$ tiene una única solución real y calcularla.

08.5. Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_0 \frac{\sin(2x)}{3x - x^2}$

b) $\lim_0 \frac{e^{2x} \sin(2x)}{e^{3x} \sin(3x)}$

c) $\lim_0 \frac{1 - \cos(x)}{e^x + e^{-x} - 2}$

d) $\lim_0 \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin(x)}$

e) $\lim_0 x (\log(x))^2$

f) $\lim_0 \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$

08.6. Calcular los límites que siguen razonando en cada caso el motivo por el que no se pueden calcular por aplicación de la regla de L'Hôpital:

a) $\lim_{+\infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \sin(x)}$

b) $\lim_{0^+} \frac{\sin(x)}{x^2 \sin(1/x)}$

08.7. Calcular el polinomio de Taylor de grados 4, 6, 8, 10 en el origen de las funciones siguientes:

a) $\exp(-2x^2)$ b) $\log(1+x^2)$ c) $\frac{1}{1+x^2}$

Hacer una representación gráfica de la función y de los polinomios de Taylor calculados en un entorno del origen.

08.8. Calcular una cota del error que se comete si se toma la aproximación

$$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Calcular aproximadamente $\log(1.0035)$ y acotar el error cometido en esta aproximación.

08.9. Un objeto de 4.95m de altura se encuentra justamente debajo de un foco de luz situado a 20.62m de altura. El objeto comienza a desplazarse hacia la derecha a una velocidad de 3.987m/s. Determinar: a) la velocidad del extremo de la sombra del objeto; b) la variación de la longitud de la sombra por unidad de tiempo.

08.10. Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a la velocidad de 2.158cm/s mientras que los otros dos se acortan de manera que el área del rectángulo es constante en el tiempo e igual a 50cm². Calcular la velocidad de variación del perímetro del rectángulo cuando la longitud de los lados que crece es 5.172cm. Calcular las dimensiones del rectángulo cuando el perímetro deja de disminuir.

08.11. Una disolución pasa de un filtro cónico de 25.41cm de altura y 15.96cm de diámetro a un depósito cilíndrico de 12.34cm de diámetro. Calcular la velocidad a la que sube el nivel de líquido en el depósito cuando la disolución del filtro tiene 12cm de profundidad y su nivel baja a la velocidad de 1.034cm/min.

08.12. Determinar la ecuación de la recta que pasando por el punto $P(1.083, 2.176)$ determina con los ejes de coordenadas un segmento de longitud mínima en el primer cuadrante.

08.13. La base de un triángulo se encuentra en el semieje de las abscisas positivas, el segundo lado se encuentra sobre la recta de ecuación $y = 2x$ y el tercer lado pasa por el punto (6,2). Determinar la pendiente de este tercer lado para que el área del triángulo sea mínima.

08.14. Se considera un alambre de longitud L , el cual se corta en dos partes: con la primera se forma un cuadrado y con la segunda una circunferencia. Calcular la longitud de cada parte para que la suma de las áreas de estas figuras sea: a) máxima; b) mínima.

08.15. Una ventana de una vivienda está formada por dos piezas, la primera con la forma habitual de un marco rectangular y en la parte superior un semicírculo (con diámetro). Si la longitud total del material usado en la construcción de la ventana es de 8.428m, calcular el diseño (dimensiones de la parte rectangular y la parte semicircular) que alcanza una máxima iluminación, es decir, una área máxima de la ventana.

08.16. Un campo de fútbol es un rectángulo que tiene las medidas siguientes: 107 m de largo y 72 m de ancho. La portería tiene una longitud de 7,32 m y está situada de forma centrada en la parte más estrecha del rectángulo. El defensa lateral derecho inicia una aproximación hacia la portería contraria paralelamente a 1 m de la línea de banda. ¿A qué distancia de la portería tiene un ángulo máximo de gol ?

08.17. Admitiendo que la resistencia a la flexión de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de la base por el cuadrado de la altura de la sección, determinar las dimensiones de la viga de resistencia máxima que se puede obtener de un tronco cilíndrico de radio R . Aplicación al caso $R = 1.267\text{m}$. Hacer una representación gráfica de la resistencia de la viga en función de su anchura, con una constante de proporcionalidad $K = 100$.

08.18. Una fábrica F está ubicada en la orilla de un río de ancho 20m; en la otra orilla del río y a una distancia de 180m aguas abajo hay un almacén M vinculado a la fábrica. Se quiere conectar la red informática desde F hasta M para controlar eficientemente los stocks. Para hacerlo se pide un presupuesto que dice que el coste para poner cable bajo el agua es de 60€/m y para ponerlo por tierra es de 40€/m, material y mano de obra incluida (sin IVA). Calcular el diseño que minimiza el coste total del cable entre F y M y calcular el coste total, sabiendo que el tipo de IVA que se aplica es el 18%.

08.19. Un canal de riego está hecho de hormigón y tiene la forma de un trapecio isósceles con tres lados de 4.523m. Calcular la forma del canal si se quiere que tenga una sección máxima para el paso del agua. Hacer una representación gráfica de la función área de la sección del canal y verificar el resultado obtenido.

08.20. Un almacén tiene la forma de un paralelepípedo de base cuadrada y un volumen $V \text{ m}^3$. Por las paredes laterales se produce una entrada de calor de $q \text{ cal/s.m}^2$ y por el tejado de tres veces más.

1) Si se supone que no hay entrada de calor por el suelo, calcular las dimensiones que ha de tener el almacén para que la entrada de calor sea mínima.

2) Calcular, en las condiciones calculadas en el apartado anterior, el calor que entra en el almacén en una hora, sabiendo que este tiene un volumen de 12000 m^3 y que $q = 20 \text{ cal/s. m}^2$.