

Tema 7

Ejercicios resueltos

07.1. Estudiar la derivabilidad y calcular la función derivada de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = |x| + x|x| \\ \text{b)} & f(x) = |x^2 - 3| \\ \text{c)} & f(x) = |2x - 3| \\ \text{d)} & f(x) = \frac{\exp(1+x) - 1}{|x^2 - 1|} \\ \text{e)} & f(x) = \begin{cases} (x-1)(x+1)^2, & \text{si } |x| \leq 1 \\ 4|x| - 4, & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \end{array}$$

07.2. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en función del número natural n .

07.3. Calcular las derivadas de las funciones que se dan a continuación y simplificar el máximo posible el resultado obtenido en el primer cálculo:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = \cos\left(x + \frac{1}{\log(x^2 + 2)}\right) \\ \text{b)} & f(x) = \arctan(\log(x)) + \log(\arctan(x)) \\ \text{c)} & f(x) = \sqrt{\cos(x)} a^{\sqrt{\cos(x)}} \\ \text{d)} & f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \end{array}$$

$$\text{e) } f(x) = \log \left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \right) \quad \text{f) } f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

07.4. a) Calcular los puntos de la curva plana $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ en los que la tangente a la curva es paralela al eje de abscisas.

b) Calcular las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la curva plana de ecuación $y = (x-1)^{2/3}$ en el punto en el que la abscisa es $x_0 = 2.451$.

07.5. a) Determinar los puntos de la curva plana $f(x) = (x-1)^3$ en los que la recta tangente es paralela a la recta $y = x+1$.

b) Calcular los puntos en que la recta tangente a la curva plana $y = x - \frac{1}{x}$ es paralela a la recta de ecuación $y = 2x-5$. Calcular las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal en estos puntos.

07.6. Calcular el área del triángulo formado por el eje de ordenadas y las rectas tangente y normal a la curva plana de ecuación $y = 6x - x^2$ en el punto (5,5).

07.7. a) Determinar la parábola de ecuación $y^2 = ax + b$ que es tangente a la bisectriz del primer cuadrante en el punto en el que la abscisa es $x_0 = 4.2063$.

b) Razonar que a la parábola de ecuación $y = Ax^2 + Bx + C$ la cuerda que une los puntos de abscisa $x=a$ y $x=b$ es paralela a la recta tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = \frac{a+b}{2}$. Haced una representación gráfica en un caso concreto.

07.8. Se considera la función $f(x) = |x|^3$. Estudiar la existencia y calcular, si procede, las derivadas de primer, segundo y tercer orden de la función.

07.9. Calcular las derivadas sucesivas hasta el orden 6 de las funciones que se dan a continuación. En cada caso ved si se puede proponer una expresión general para la derivada de orden n :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \exp(x^2) & \text{b) } f(x) = (1+x^2) \arctan(x) \\ \text{c) } f(x) = \log(1+x^2)^{1/3} & \text{d) } f(x) = \frac{1+x}{1-x} \end{array}$$

$$e) \quad f(x) = \frac{\log(x)}{x}$$

$$f) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x-1}$$

07.10. a) Determinar el subconjunto de la recta real en el que se puede aproximar $(2x+1.24)^{1/6}$ por $(2x)^{1/6}$ con un error inferior a 10^{-4} .

b) Determinar el subconjunto de la recta real en el que se puede aproximar $\log(1.232x+5.246)$ por $\log(1.232x)$ con un error inferior a 10^{-4} .

07.11. La resistencia eléctrica de un hilo conductor es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional al cuadrado de su radio (la constante de proporcionalidad se llama resistividad del material). Aproximar el porcentaje de error en la medida de la resistencia si en la medida del radio se comete un error del 3.45%.

07.12. Aplicando derivación implícita, calcular las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a las curvas planas siguientes, en el punto indicado:

a) Curva plana $3-y=y^x$, punto de abscisa $x=0$;

b) Curva plana $y=x-2\log(y)$, punto de ordenada $y=1$;

c) Curva plana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, punto de abscisa $x=a/2$;

07.13. Se considera la curva plana de ecuación $y=4x^3+3x^2+2x+1$.

a) Determinar los puntos de la curva en que la tangente es paralela a la recta de ecuación $2x-y+8=0$.

b) Determinar los puntos de la curva en que la tangente es perpendicular a la recta de ecuación $x+2y+9=0$.

07.14. Se considera la curva plana de ecuación $3x^3y-y^4+5x^2+5=0$. Haced una representación gráfica de esta curva plana. Si se supone que en un entorno del punto $(1,2)$ la curva anterior define implícitamente una función diferenciable que designamos $y(x)$ tal que $y(1)=2$, calcular la función derivada de esta función implícita y su valor en $x=1$. Calcular la recta tangente y la recta normal a la curva plana en el punto $(1,2)$. Calcular las funciones derivadas de segundo y tercer orden de la función $y(x)$ y su valor en el punto $x=1$.

15. Se considera la curva plana de ecuación $e^x-4xy+y^2-1=0$. Haced una representación gráfica de esta curva plana. Si se supone que en un entorno del punto $(0,1)$ la curva anterior define implícitamente una función diferenciable que designamos

$y(x)$ tal que $y(0)=1$, calcular la función derivada de esta función implícita y su valor en $x=0$. Calcular la recta tangente y la recta normal a la curva plana en el punto $(0,1)$. Calcular las funciones derivadas de segundo y tercer orden de la función $y(x)$ y su valor en el punto $x=0$.