

## Tema 6

### Ejercicios resueltos

**06.1.** Una función  $f$  se dice que es par si se cumple  $f(-x) = f(x)$ ,  $x \in [-a, a] \subset \mathbb{R}$  y se dice que es impar si se cumple  $f(-x) = -f(x)$ ,  $x \in [-a, a] \subset \mathbb{R}$ .

Se pide:

- Interpretar geoméricamente el significado de estas definiciones.
- Se consideran las funciones

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) ; \quad f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$

Razonar si se trata de funciones pares o impares. Representadlas gráficamente.

- Razonar que cualquier función  $f: [-a, a] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se puede escribir como la suma de una función par y de una función impar. Aplicadlo a las funciones  $f(x) = \exp(x)$  y  $f(x) = x^3 + 5x + 4$ .

**06.2.** De las funciones que se dan a continuación, razonar si la función es estrictamente creciente en un intervalo o subconjunto de la recta real y calcular la expresión analítica de su función inversa, caso de que exista. Hacer un gráfico en el que haya la gráfica de la función, la de su inversa y la recta de ecuación  $y = x$ ; comentar este gráfico.

a)  $f(x) = 2.34x - 1.87$

b)  $f(x) = \frac{1}{x-5}$

c)  $f(x) = x^3 + 3.02x^2 + 3.034x + 1.087$

d)  $f(x) = 1.0234 \exp(1.02x)$

**06.3.** Se consideran las funciones definidas por

$$f_1(x) = x^2 - 1.023; \quad f_2(x) = 3.43x - 1.024; \quad f_3(x) = \frac{1.23}{0.987 + x^2}$$

Calcular las funciones:

- a)  $2.35f_1 - 4.987f_3$       b)  $(f_1 + 5.43f_2)/(f_3)^2$   
 c)  $f_1 \circ f_1 \circ f_1$       d)  $\frac{1}{f_1 \circ f_3}$   
 e)  $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$       f)  $(f_1 + f_2) \circ f_3$

**06.4.** Definir con wxMaxima y representar gráficamente las siguientes funciones definidas a intervalos:

- a)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1.02}{0.9851 + 1.024x^2}, & x < 4 \\ \exp(4 - 1.02x), & x \geq 4 \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} \exp(1.00234x), & x < 0 \\ \exp(-1.00542x), & x \geq 0 \end{cases}$   
 c)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x-2}, & 0 < x < 2 \\ \log(x-2), & x \geq 2 \end{cases}$       d)  $f(x) = \begin{cases} e^{1.02x} \cos(0.45x), & x \leq 0 \\ 0.432x^2 + 1, & 0 < x \leq 2 \\ 2.0032 \log(x), & 2 < x \leq 4 \\ \frac{34.561}{1 + 1.0034x^2}, & x > 4 \end{cases}$

**06.5.** Estudiar la existencia y calculad, si procede, los límites laterales siguientes:

- a)  $\lim_{2^-} \frac{x-2}{|x-2|}$  ;  $\lim_{2^+} \frac{x-2}{|x-2|}$   
 b)  $\lim_{0^-} \frac{2x \sin(x)}{|x|}$  ;  $\lim_{0^+} \frac{2x \sin(x)}{|x|}$

**06.6.** Se consideran las funciones  $f(x) = \exp(1/x)$  y  $g(x) = \frac{\exp(1/x)}{\exp(1/x) - 1}$ . Determinar

los límites laterales en el origen de las funciones  $f(x)$ ,  $\frac{f(x)}{x}$ ,  $g(x)$  y  $xg(x)$ .

**06.7.** Calcular los límites de funciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2/3} - 2x^{1/3} + 1}{(x-1)^2} \\ \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2} \right)^{\frac{1}{x^2+2}} & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin(x)} - \frac{1}{1-\cos(x)} \right) \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2} & \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} \\ \text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+ax)(1+bx)} - 1}{x} & \text{h)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x \end{array}$$

**06.8.** Calcular las asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la gráfica de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} & \text{b)} \quad f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \\ \text{c)} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} & \text{d)} \quad y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \end{array}$$

**06.9.** Estudiar la continuidad de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad f(x) = \frac{|x-2| + (x-2)}{(x-2)^2} & \text{b)} \quad f(x) = \frac{|x|}{x} + 4 \\ \text{c)} \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 0 \\ x-2, & 0 \leq x < 3 \\ \frac{x^2-x}{6}, & x \geq 3 \end{cases} & \text{d)} \quad f(x) = \begin{cases} E(x), & x < 0 \\ \frac{x^2-6}{6}, & 0 \leq x < 6 \\ x-1, & x \geq 6 \end{cases} \end{array}$$

**06.10.** Determinar, si existen, los valores de los parámetros  $a, b \in \mathbb{R}$  que hacen continuas en su campo de existencia las funciones siguientes:

a) 
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$$

b) 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$$

**06.11.** Determinar todos los ceros de las funciones siguientes:

a)  $f(x) = \sin(x) - x + 1$

b)  $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$

c)  $f(x) = x^3 - 3x + 1$