Tema 5
Series numéricas

Objetivos

1. Definir series con wxMaxima.
2. Calcular sumas parciales de una serie.
3. Interpretar la definición de suma de una serie.
4. Calcular la suma de una serie geométrica.
5. Calcular la suma de una serie telescópica.
6. Aplicación práctica de los criterios de convergencia para series de términos positivos.
7. Aplicación práctica del cálculo del dominio de una serie de potencias.

Contenidos

Referencias

AEM11 ALANINOS PRATS, J; EXTREMERA LIZANA, J; MUÑOZ RIVAS, P. (2011)
Cálculo con wxMaxima.

APJ11 ALANINOS PRATS, J; APARICIO DEL PRADO, C; EXTREMERA LIZANA, J; MUÑOZ RIVAS, P.; VILLENA MUÑOZ, A.R. (2011)
Prácticas de ordenador con wxMaxima.

BR09 BRUZÓN GALLEGO, M. DE LOS SANTOS; RAMÍREZ LABRADOR, JOSÉ (2009)
Modelos matemáticos con Maxima

BU07 DE BURGOS, JUAN (2007)
Cálculo Infinitesimal de una variable (segunda edición).

ES08 ESTELA CARBONELL, M. ROSA; SAÀ SEOANE, JOEL (2008)
Cálculo con soporte interactivo en moodle.

ES02 ESTEP, DONALD (2002)
Practical Analysis in one variable

JB01 JARAUTA BRAGULAT, EUSEBI (2001)
Anàlisi Matemàtica d'una variable. Fonaments i aplicacions.

RR05 REDONDO NEBLE, M. VICTORIA; RODRÍGUEZ GALVÁN, J. RAFAEL (2005)
Introducción a Maxima

RR08b RODRÍGUEZ RIOTORTO, MARIO (2008)
Curso intensivo i-MATH de software libre orientado a Ciencias e Ingeniería

RU80 RUDIN, WALTER (1980)
Principios de Análisis Matemático.

SP95 SPIVAK, MICHAEL (1995)
Calculus (Càlcul Infinitesimal).

VR09 VALLEJO RODRÍGUEZ, JOSÉ ANTONIO (2009)
Cálculo diferencial con Maxima

05-1.- Definición de serie. Ejemplos

Los contenidos de este apartado se desarrollan en el fichero **Tema_05-1.wxm**.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión numérica, se llama suma parcial n-ésima a

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ n \in \mathbb{N}$$

La sucesión de sumas parciales $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se llama **serie** asociada a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se acostumbra a designar $\sum_{n\geq 1} a_n$. Si esta sucesión de sumas parciales, es decir la serie, es convergente, su límite se llama **suma de la serie** y se designa $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Para definir una serie numérica con wxMaxima hay que utilizar una letra de índice diferente en la sucesión inicial y en la sucesión de sumas parciales.

Ejemplo 05-1.1. Veamos la definición de una serie con wxMaxima. La serie numérica es $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$. Obsérvese que hay que utilizar un índice de suma diferente para la sucesión y para las sumas parciales:

(%i1) a[k]:=1/(k^2+1);

(%o1) $a_k := \frac{1}{k^2+1}$

(%i2) makelist(a[k], k, 1, 10);

(%o2) $[\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{17},\frac{1}{26},\frac{1}{37},\frac{1}{50},\frac{1}{65},\frac{1}{82},\frac{1}{101}]$

(%i3) S[n]:=sum(a[k], k, 1, n);

(%o3) $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

Se pueden obtener los primeros términos de la sucesión de sumas parciales:

(%i4) makelist(S[n], n, 1, 5);

(%o4) $[\frac{1}{2},\frac{7}{10},\frac{4}{5},\frac{73}{85},\frac{1983}{2210}]$

(%i5) makelist(S[n], n, 1, 5), numer;

(%o5) [0.5,0.7,0.8,0.85882352941176,0.8972850678733]

También se pueden obtener términos cualesquiera de la sucesión de sumas parciales:

```
(%i6) 'S[20] = S[20];        'S[20] = S[20], numer;
```

$$(\%o6)\ S_{20}=\frac{127839875459491159721369}{124364894551971407543105}$$

$$(\%o7)\ S_{20}=1.027941815252917$$

```
(%i8) 'S[50] = S[50];        'S[50] = S[50], numer;
```

$$(\%o8)\ S_{50}=\frac{2985501955349657655368868349886527697468223781558551467442494587447100559735}{2824838418959566753968474610841248359818030181533374734078775452647631957434}$$

$$(\%o9)\ S_{50}=1.056875301366535$$

```
(%i10) 'S[100] = S[100];        'S[100] = S[100], numer;
```

$$(\%o10)\ S_{100}=\frac{783038547070974244933847469729[129\ digits]391678070358329582695950979153}{734059038271153602151391138846[129\ digits]489155184000258256242931637125}$$

$$(\%o11)\ S_{100}=1.066724209152409$$

Obsérvese el poco interés que tiene la respuesta en los casos de las salidas (%o6), (%o8) y (%o10).

La suma de la serie no se puede calcular de forma similar al límite de una sucesión. Así, si se escribe en el programa el cálculo del límite se obtiene el resultado:

```
(%i12) limit(S[n], n, inf);
```

$$(\%o12)\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$$

Se podría pensar que la instrucción a aplicar es la que podría calcular la “suma infinita”, es decir:

```
(%i13) S=sum(a[k], k, 1, inf);
```

$$(\%o13)\ S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}$$

El resultado muestra claramente que esto no es así y que el programa no hace ningún cálculo. Por lo tanto, habrá que aplicar otras metodologías para calcular la suma de una serie, en el caso en que esto sea posible, es decir, cuando la serie es convergente y se conoce una expresión de su suma.

La condición necesaria de convergencia establece que para que una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ pueda ser convergente, la sucesión inicial ha de ser un infinitésimo y en cas de no ser lo, la serie es divergente. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 05-1.2.- Si se considera la sucesión con $a_n = (-1)^n$, se ve inmediatamente que la sucesión de sumas parciales no es convergente:

```
(%i1) a[k]:=(-1)^k;                makelist(a[k], k, 0, 10);
```

$$(\%o1)\ a_k := (-1)^k$$

$$(\%o2)\ [1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1]$$

```
(%i3) S[n]:=sum(a[k], k, 0, n);     makelist(S[n], n, 1, 10);
```

$$(\%o3)\ S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$(\%o4)\ [0,1,0,1,0,1,0,1,0,1]$$

Ejemplo 05-1.3 (La serie geométrica). Si x es un número real cualquiera y se considera la sucesión de sus potencias de exponente natural $\left(x^n\right)_{n\geq 0} = \left(1, x, x^2, ..., x^n, ...\right)$, la serie asociada a esta sucesión se llama serie geométrica. Esta serie es convergente si y sólo si, se cumple $|x| < 1$ y la suma de la serie es $X = \dfrac{1}{1-x}$.

En efecto:

```
(%i1) a[k]:=x^k;
```

$$(\%o1)\ a_k := x^k$$

```
(%i2) makelist(a[k], k, 0, 10);
```

$$(\%o2)\ [1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6,x^7,x^8,x^9,x^{10}]$$

```
(%i3) S[n]:=sum(a[k], k, 0, n);
```

$$(\%o3)\ S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

```
(%i4) sum(a[k], k, 0, inf)=1/(1-x);
```

$$(\%o4)\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Por ejemplo, si $x=\frac{1}{2}$ la serie geométrica es convergente:

```
(%i1) a[k]:=(1/2)^k;
```

$$(\%o1)\ a_k := \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

```
(%i2) makelist(a[k], k, 0, 10);
```

$$(\%o2)\ [1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128},\frac{1}{256},\frac{1}{512},\frac{1}{1024}]$$

```
(%i3) S[n]:=sum(a[k], k, 0, n);
```

$$(\%o3)\ S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$

```
(%i4) makelist(S[n], n, 1, 10);
```

$$(\%o4)\ [\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{15}{8},\frac{31}{16},\frac{63}{32},\frac{127}{64},\frac{255}{128},\frac{511}{256},\frac{1023}{512},\frac{2047}{1024}]$$

```
(%i5) sum(a[k], k, 0, inf)=1/(1-1/2);
```

$$(\%o5)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Si la suma comienza en un número $n_0 > 0$, para calcular la suma de la serie geométrica hay que "descontar" los primeros n_0 términos; por ejemplo:

```
(%i6) aa[k]:=(1/2)^k;
```

$$(\%o6)\ aa_k := \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

```
(%i7) makelist(aa[k], k, 3, 10);
```

$$(\%o7)\ [\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128},\frac{1}{256},\frac{1}{512},\frac{1}{1024}]$$

```
(%i8) sum(aa[k], k, 3, inf)=1/(1-1/2)-((1/2)^0+(1/2)^1+(1/2)^2);
```

$$(\%o8)\ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 05-1.4 (Series telescópicas). Se llama serie telescópica a la asociada a la sucesión de diferencias de una sucesión numérica, es decir, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ si $a_n = b_n - b_{n+1}$. Si la sucesión (b_n) es convergente, la serie telescópica es convergente y su suma es:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b_1 - \lim(b_{n+1})$$

Así, por ejemplo, la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ es telescópica, ya que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Dado que $\lim\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$, la serie telescópica es convergente. Veamos los cálculos con wxMaxima:

```
(%i1) b[k]:=1/k;
```

$$\text{(\%o1)}\ b_k := \frac{1}{k}$$

```
(%i2) a[k]:=b[k]-b[k+1];
```

$$\text{(\%o2)}\ a_k := b_k - b_{k+1}$$

```
(%i3) makelist(a[k], k, 1, 10);
```

$$\text{(\%o3)}\ [\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{56}, \frac{1}{72}, \frac{1}{90}, \frac{1}{110}]$$

```
(%i4) sum((a[k]), k, 1, inf)=b[1]-limit(b[k], k, inf);
```

$$\text{(\%o4)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1$$

05-2.- Series de términos positivos

Una serie numérica $\sum_{n\geq 1} a_n$ se llama de términos positivos si se cumple $a_n \geq 0$, para todo $n \geq 1$. En este caso, la sucesión de sumas parciales es monótona creciente y, por lo tanto, la serie es convergente si la sucesión de sumas parciales es acotada superiormente.

Los contenidos de este apartado se desarrollan en el fichero **Tema_05-2.wxm**.

Ejemplo 05-2.1 (La serie armónica). Un ejemplo muy conocido de serie de términos positivos es la llamada serie armónica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ que, aunque la sucesión base es un infinitésimo, resulta que es divergente. Veamos algunos cálculos con wxMaxima:

(%i1) a[k]:=1/k; makelist(a[k], k, 1, 10);

(%o1) $a_k := \frac{1}{k}$

(%o2) $[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}]$

(%i3) A[n]:=sum(a[k], k, 1, n); makelist(A[n], n, 1, 10);

(%o3) $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

(%o4) $[1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \frac{7129}{2520}, \frac{7381}{2520}]$

Una forma de obtener una cierta aproximación de la suma, caso de ser acotada, es calcular algunos términos con índice "grande" de la sucesión de sumas parciales; por ejemplo:

(%i5) A[20]; A[30]; A[40];

(%o5) $\frac{55835135}{15519504}$

(%o6) $\frac{9304682830147}{2329089562800}$

(%o7) $\frac{2078178381193813}{485721041551200}$

Esta respuesta, tal como se ha visto en el apartado anterior, no es nada fácil de interpretar numéricamente; parece pues que hay que pedir al programa que nos dé la representación decimal de estas sumas parciales. Aprovechamos para incrementar sensiblemente el índice:

```
(%i8) A[1000], numer;
      A[10000], numer;
      A[20000], numer;
(%o8) 7.485470860550343
(%o9) 9.787606036044345
(%o10) 10.48072821722932
```

Como hay una diferencia significativa entre estos resultados, calculamos un par más:

```
(%i11) A[30000], numer;
       A[40000], numer;
(%o11) 10.88618499211992
(%o12) 11.1738628979455
```

Esto no da información concluyente en este caso; sólo se puede intuir que la suma es cada vez más grande y que no parece estabilizarse. Más adelante veremos casos en que sí podremos sacar conclusiones más precisas. Finalmente, sólo nos queda ilustrar el resultado ya conocido: que la suma de la serie armónica no es finita, es decir:

```
(%i13) sum(a[k], k, 1, inf)=+inf;
```

(%o13) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Las series de términos positivos $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ se llaman harmónicos generales o de Riemann. Estas series son convergentes si y sólo si, se cumple $p > 1$. Por ejemplo si $p = 2$ resulta:

```
(%i14) aa[k]:=1/k^2;
```

(%o14) $aa_k := \frac{1}{k^2}$

```
(%i15) AA[n]:=sum(aa[k], k, 1, n);                makelist(AA[n], n, 1, 10);
```

(%o15) $AA_n := \sum_{k=1}^{n} aa_k$

(%o16) $[1, \frac{5}{4}, \frac{49}{36}, \frac{205}{144}, \frac{5269}{3600}, \frac{5369}{3600}, \frac{266681}{176400}, \frac{1077749}{705600}, \frac{9778141}{6350400}, \frac{1968329}{1270080}]$

```
(%i17) AA[1000], numer;
       AA[10000], numer;
       AA[20000], numer;
```

(%o17) 1.643934566681561

(%o18) 1.644834071848065

(%o19) 1.644884068098209

Por lo tanto, dado que la serie es convergente, se puede afirmar que la suma de la serie es aproximadamente 1.6448 ± 10^{-4} .

Ejemplo 05-2.2 (Criterio de la raíz o de Cauchy). Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ es una serie de términos positivos, este criterio se basa en el cálculo del límite

$$L_A = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$$

Si se cumple $0 \leq L_A < 1$, la serie es convergente, si $L_A > 1$ la serie es divergente y si vale 1 no se puede concluir nada por aplicación de este criterio. Consideremos la serie numérica

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

La introduciremos en el programa wxMaxima y calcularemos el límite que establece el criterio de la raíz:

```
(%i1) a[k]:=(k/(2*k+1))^(k);            makelist(a[k], k, 1, 7);
```

(%o1) $a_k := \left(\frac{k}{2\,k+1} \right)^k$

(%o2) $[\frac{1}{3}, \frac{4}{25}, \frac{27}{343}, \frac{256}{6561}, \frac{3125}{161051}, \frac{46656}{4826809}, \frac{823543}{170859375}]$

```
(%i3) A[n]:=sum(a[k], k, 1, n);          makelist(A[n], n, 1, 5);
```

(%o3) $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

(%o4) $[\frac{1}{3},\frac{37}{75},\frac{14716}{25725},\frac{34379092}{56260575},\frac{5712601442567}{9060821864325}]$

```
(%i5) A[1],numer;      A[2],numer;      A[3],numer;
      A[4],numer;      A[5],numer;
(%o5) 0.33333333333333
(%o6) 0.49333333333333
(%o7) 0.57205053449951
(%o8) 0.61106897681014
(%o9) 0.63047276815574
(%i10) L1=limit((a[k])^(1/k), k, inf);
```

(%o10) $L1 = \frac{1}{2}$

Con este resultado se puede concluir que la serie es convergente.

Ejemplo 05-2.3 (Criterio del cociente o de D'Alembert). Si $\sum_{n\geq 1} a_n$ es una serie de términos positivos, este criterio se basa en el cálculo del límite

$$L_Q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Si se cumple $0 \leq L_Q < 1$, la serie es convergente, si $L_Q > 1$ la serie es divergente y si vale 1 no se puede concluir nada por aplicación de este criterio. Consideremos la serie numérica

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

La introduciremos en el programa wxMaxima y calcularemos el límite que establece el criterio. Obtenemos:

```
(%i1) a[k]:=(k/(2*k+1))^(k);        makelist(a[k], k, 1, 5);
```

(%o1) $a_k := \left(\frac{k}{2\,k+1}\right)^k$

(%o2) $[\frac{1}{3}, \frac{4}{25}, \frac{27}{343}, \frac{256}{6561}, \frac{3125}{161051}]$

```
(%i3) A[n]:=sum(a[k], k, 1, n);        makelist(A[n], n, 1, 5);
```

(%o3) $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

(%o4) $[\frac{1}{3}, \frac{37}{75}, \frac{14716}{25725}, \frac{34379092}{56260575}, \frac{5712601442567}{9060821864325}]$

```
(%i5) A[1],numer;      A[2],numer;      A[3],numer;
      A[4],numer;      A[5],numer;
```

(%o5) 0.33333333333333

(%o6) 0.49333333333333

(%o7) 0.57205053449951

(%o8) 0.61106897681014

(%o9) 0.63047276815574

```
(%i10) b[k]:=a[k+1]/a[k];        makelist(b[k], k, 1, 5);
```

(%o10) $b_k := \frac{a_{k+1}}{a_k}$

(%o11) $[\frac{12}{25}, \frac{675}{1372}, \frac{87808}{177147}, \frac{20503125}{41229056}, \frac{7513995456}{15083778125}]$

```
(%i12) L2=limit(b[k], k, inf);
```

(%o12) $L2 = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, la serie es convergente. Obsérvese que el cálculo de este límite sin la ayuda del programa no es sencillo. A título de comprobación de lo que se ha dicho sobre este criterio, apliquémoslo a las series armónicas vistas en el Ejemplo 05-2.1: en el primer caso resulta

```
(%i13) aa[k]:=1/k^2;        c[k]:=aa[k+1]/aa[k];        L3=limit(c[k], k, inf);
```

(%o13) $aa_k := \frac{1}{k^2}$

(%o14) $c_k := \frac{aa_{k+1}}{aa_k}$

(%o15) $L3 = 1$

En el segundo caso, resulta:

```
(%i16) aaa[k]:=1/k;        c[k]:=aaa[k+1]/aaa[k];        L4=limit(c[k], k, inf);
```

(%o16) $aaa_k := \frac{1}{k}$

(%o17) $c_k := \frac{aaa_{k+1}}{aaa_k}$

(%o18) $L4 = 1$

Obsérvese, pues, que el resultado obtenido es el mismo todo y que las series tienen diferente carácter (la primera es convergente y la segunda divergente).

Ejemplo 05-2.4 (La serie exponencial). El número *e* se puede definir como suma de una serie de términos positivos:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

La implementación de los cálculos con wxMaxima es la siguiente:

```
(%i1) e[k]:=1/k!;
```

(%o1) $e_k := \frac{1}{k!}$

```
(%i2) makelist(e[k], k, 0, 10);
```

(%o2) $[1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \frac{1}{5040}, \frac{1}{40320}, \frac{1}{362880}, \frac{1}{3628800}]$

```
(%i3) E[n]:=sum(e[k], k, 0, n);
```

(%o3) $E_n := \sum_{k=0}^{n} e_k$

```
(%i4) makelist(E[n], n, 0, 5);
```

(%o4) $[1, 2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{65}{24}, \frac{163}{60}]$

```
(%i5)  makelist(E[n], n, 0, 5), numer;
```

(%o5) [1,2,2.5,2.666666666666667,2.708333333333334,2.716666666666667]

```
(%i6) sum(1/k!, k, 0, inf)=%e;
```

(%o6) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \%e$

Sabiendo que la serie es convergente, calcularemos un par de sumas "grandes" y compararemos los resultados:

```
(%i7) n:20;        E[n],numer;        E[n+1],numer;
(%o7) 20
(%o8) 2.718281828459046
(%o9) 2.718281828459046
```

Con esta información, se puede escribir la aproximación del número e:

$$e = 2.718281828459046 \pm 10^{-14}.$$

05-3.- Series alternadas. Convergencia absoluta y convergencia condicional

Los contenidos de este apartado se desarrollan en el fichero **Tema_05-3.wxm**.

Si $a_n \geq 0$, se llaman series alternadas las que tienen la forma

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n \quad ; \quad \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1} a_n$$

En wxMaxima se puede ver esta definición de la forma siguiente; de la primera:

```
(%i1) makelist((-1)^k*a[k], k, 1, 6);
```

(%o1) $[-a_1, a_2, -a_3, a_4, -a_5, a_6]$

```
(%i2) S[n]:=sum((-1)^k*a[k], k, 1, n);
      S[1];   S[2];   S[3];   S[4];
```

(%o2) $S_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$

(%o3) $-a_1$

(%o4) $a_2 - a_1$

(%o5) $-a_3 + a_2 - a_1$

(%o6) $a_4 - a_3 + a_2 - a_1$

Y ahora de la segunda:

```
(%i7) makelist((-1)^(k+1)*a[k], k, 1, 6);
```

(%o7) $[a_1, -a_2, a_3, -a_4, a_5, -a_6]$

```
(%i8) T[n]:=sum((-1)^(k+1)*a[k], k, 1, n);
      T[1];   T[2];   T[3];   T[4];
```

(%o8) $T_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$

(%o9) a_1

(%o10) $a_1 - a_2$

(%o11) $a_3 - a_2 + a_1$

(%o12) $-a_4 + a_3 - a_2 + a_1$

En el primer caso, las sumas parciales de índice par forman una sucesión monótona decreciente y las de índice impar una sucesión monótona creciente. En el segundo caso, la situación es justamente la contraria. El criterio de convergencia que se aplica en el caso de las series alternadas es el llamado criterio de Leibniz, según el cual si la sucesión (a_n) es un infinitésimo y monótona decreciente, entonces las series alternadas definidas antes son convergentes.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 05-3.1. Se consideran la serie alternada $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{1}{n}$. Se trata de una serie convergente, ya que la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ cumple las condiciones del criterio de Leibniz. Definimos la serie con wxMaxima:

(%i1) a[k]:=((-1)^k)/k;

(%o1) $a_k := \frac{(-1)^k}{k}$

(%i2) '(an)=makelist(a[k], k, 1, 10);

(%o2) $an = [-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{10}]$

(%i3) A[n]:=sum(a[k], k, 1, n);

(%o3) $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$

(%i4) '(An)=makelist(A[n], n, 1, 10);

(%o4) $An = [-1, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{12}, -\frac{47}{60}, -\frac{37}{60}, -\frac{319}{420}, -\frac{533}{840}, -\frac{1879}{2520}, -\frac{1627}{2520}]$

Ahora vemos las primeras sumas parciales de índice par y de índice impar:

(%i5) makelist(A[2*n], n, 1, 6);

(%o5) $[-\frac{1}{2}, -\frac{7}{12}, -\frac{37}{60}, -\frac{533}{840}, -\frac{1627}{2520}, -\frac{18107}{27720}]$

(%i6) makelist(A[2*n-1], n, 1, 6);

(%o6) $[-1, -\frac{5}{6}, -\frac{47}{60}, -\frac{319}{420}, -\frac{1879}{2520}, -\frac{20417}{27720}]$

Para poder estudiar la monotonía, sería mejor tener los valores numéricos de estas sumas parciales:

```
(%i7) float(A[1]);     float(A[3]);
      float(A[5]);     float(A[7]);
(%o7) -1.0
(%o8) -0.83333333333333
(%o9) -0.78333333333333
(%o10) -0.75952380952381
(%i11) float(A[2]);    float(A[4]);
       float(A[6]);    float(A[8]);
(%o11) -0.5
(%o12) -0.58333333333333
(%o13) -0.61666666666667
(%o14) -0.63452380952381
```

Se puede intuir que las sumas parciales de índice par forman una sucesión monótona decreciente y las de índice impar una sucesión monótona creciente. Como es conocido, se puede determinar un intervalo en el que haya la suma de la serie, calculando sumas parciales de orden superior.

Comenzaremos por obtener unas cuantas sumas parciales de índice par y después otras de índice impar:

```
(%i15) A[100],numer;     A[102],numer;
       A[1000],numer;    A[1002],numer;
(%o15) -0.6881721793102
(%o16) -0.68826924784058
(%o17) -0.69264743055982
(%o18) -0.69264842756681
(%i19) A[101],numer;     A[103],numer;
       A[1001],numer;    A[1003],numer;
(%o19) -0.6980731694092
(%o20) -0.69797798570466
(%o21) -0.69364643155882
(%o22) -0.69364543653989
```

Por lo tanto, se puede afirmar que la suma de la serie se encuentra en el intervalo $]-0.693,-0.692[$.

Convergencia absoluta.- La convergencia absoluta de una serie numérica $\sum_{n\geq 1} a_n$ hace referencia a la convergencia de la serie de términos positivos $\sum_{n\geq 1} |a_n|$, verificándose que la convergencia absoluta implica la convergencia (ordinaria).

El recíproco no es cierto y puede ser que una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ sea convergente no lo sea absolutamente; en este caso se dice que la serie es condicionalmente convergente. Por ejemplo, la serie estudiada en el Ejemplo 05-3.1 es condicionalmente convergente.

05-4.- Series de potencias

Los contenidos de este apartado se desarrollan en el fichero **Tema_05-4.wxm**.

Si (a_n) es una sucesión numérica, $x \in \mathbb{R}$ es un número real cualquiera y $x_0 \in \mathbb{R}$ es un número real fijo, se llama serie de potencias centrada en x_0 a la serie $\sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n$. Si $x_0 = 0$ la serie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ se llama centrada en el origen, que acostumbra a ser el caso más frecuente.

El carácter de una serie de potencias depende de la sucesión (a_n) y del número $x \in \mathbb{R}$, de la siguiente manera: si se designa por $L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ se cumple

- Si $L = 0$ la serie es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$;
- Si $L = +\infty$ la serie es convergente sólo si $x = 0$;
- Si $0 < L < +\infty$ la serie es absolutamente convergente en el intervalo $]x_0 - R, x_0 + R[$, siendo $R = 1/L$.

El número real $R > 0$ se llama radio de convergencia de la serie de potencias. En los puntos $x = x_0 - R,\ x = x_0 + R$ hay que estudiar la convergencia de la serie numérica correspondiente. El conjunto de puntos en los que la serie es convergente se llama dominio de convergencia. Cabe decir que en ocasiones se puede calcular más fácilmente el límite $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; si este límite existe, entonces coincide con $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Definición de una serie de potencias centrada en x_0 con wxMaxima:

```
(%i1) makelist(a[k], k, 1, 5);
```

(%o1) $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$

```
(%i2) makelist(a[k]*(x-x0)^k, k, 1, 5);
```

(%o2) $[a_1 (x-x0), a_2 (x-x0)^2, a_3 (x-x0)^3, a_4 (x-x0)^4, a_5 (x-x0)^5]$

```
(%i3) s[k]:=a[k]*(x-x0)^k;
```

(%o3) $s_k := a_k (x-x0)^k$

```
(%i4) S[n]:=sum(s[k], k, 0, n);
```

(%o4) $S_n := \sum_{k=0}^{n} s_k$

(%i5) S[0]; S[2]; S[4];

(%o5) a_0

(%o6) $a_1\,(x-x0)+a_2\,(x-x0)^2+a_0$

(%o7) $a_1\,(x-x0)+a_4\,(x-x0)^4+a_3\,(x-x0)^3+a_2\,(x-x0)^2+$

Definición de una serie de potencias centrada en el origen con wxMaxima:

(%i8) makelist(b[k], k, 1, 5);

(%o8) $[b_1,b_2,b_3,b_4,b_5]$

(%i9) makelist(x^k, k, 1, 5);

(%o9) $[x,x^2,x^3,x^4,x^5]$

(%i10) t[k]:=b[k]*x^k;

(%o10) $t_k:=b_k\,x^k$

(%i11) T[n]:=sum(t[k], k, 0, n);

(%o11) $T_n:=\sum_{k=0}^{n} t_k$

(%i12) T[0]; T[2]; T[4];

(%o12) b_0

(%o13) $b_2\,x^2+b_1\,x+b_0$

(%o14) $b_4\,x^4+b_3\,x^3+b_2\,x^2+b_1\,x+$

Ejemplo 05-4.1. Se considera la serie de potencias $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n$. En primer lugar la definiremos con wxMaxima:

(%i1) a[k]:=1/k!; s[k]:=a[k]*x^k; makelist(s[k], k, 1, 10);

(%o1) $a_k:=\frac{1}{k!}$

(%o2) $s_k:=a_k\,x^k$

(%o3) $[x,\frac{x^2}{2},\frac{x^3}{6},\frac{x^4}{24},\frac{x^5}{120},\frac{x^6}{720},\frac{x^7}{5040},\frac{x^8}{40320},\frac{x^9}{362880},\frac{x^{10}}{3628800}]$

```
(%i4) S[n]:=sum(s[k], k, 0, n);
```

(%o4) $S_n := \sum_{k=0}^{n} s_k$

```
(%i5) makelist(S[n], n, 0, 5);
```

(%o5) $[1, x+1, \frac{x^2}{2}+x+1, \frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1, \frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1, \frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1]$

Ahora determinaremos su dominio de convergencia:

```
(%i6) b[k]:=(a[k])^(1/k);
      '(lim(b[k])) = limit(b[k], k, inf);
```

(%o6) $b_k := a_k^{1/k}$

(%o7) $\lim(b_k) = 0$

Por lo tanto, la serie es absolutamente convergente para todo número real (radio de convergencia infinito).

Ejemplo 05-4.2. Se considera la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} n!x^n$. En primer lugar la definiremos con wxMaxima:

```
(%i1) a[k]:=k!;    s[k]:=a[k]*x^k;
```

(%o1) $a_k := k!$

(%o2) $s_k := a_k\, x^k$

```
(%i3) makelist(s[k], k, 0, 5);
```

(%o3) $[1, x, 2x^2, 6x^3, 24x^4, 120x^5]$

```
(%i4) S[n]:=sum(s[k], k, 0, n);   S[0];   S[2];   S[4];   S[6];
```

(%o4) $S_n := \sum_{k=0}^{n} s_k$

(%o5) 1

(%o6) $2x^2+x+1$

(%o7) $24x^4+6x^3+2x^2+x+1$

(%o8) $720x^6+120x^5+24x^4+6x^3+2x^2+x+1$

Ahora determinaremos su dominio de convergencia:

```
(%i9) b[k]:=(a[k])^(1/k);
      '(lim(b[k])) = L : limit(b[k], k, inf);
```

(%o9) $b_k := a_k^{1/k}$

(%o10) $\lim(b_k) = \infty$

```
(%i11) R=1/L;
```

(%o11) $R = \frac{1}{\infty}$

Por lo tanto, la serie es convergente únicamente en el origen (radio de convergencia nulo).

Ejemplo 05-4.3. Se considera la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} x^n$:

```
(%i1) a[k]:=1/k;     s[k]:=a[k]*x^k;
```

(%o1) $a_k := \frac{1}{k}$

(%o2) $s_k := a_k\, x^k$

```
(%i3)  makelist(s[k], k, 1, 10);
```

(%o3) $[x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \frac{x^5}{5}, \frac{x^6}{6}, \frac{x^7}{7}, \frac{x^8}{8}, \frac{x^9}{9}, \frac{x^{10}}{10}]$

```
(%i4) S[n]:=sum(s[k], k, 1, n);
```

(%o4) $S_n := \sum_{k=1}^{n} s_k$

```
(%i5) makelist(S[n], n, 1, 5);
```

(%o5) $[x, \frac{x^2}{2}+x, \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x, \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x, \frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x]$

Ahora determinaremos su dominio de convergencia:

```
(%i6) b[k]:=(a[k])^(1/k);
      '(lim(b[k])) = L :  limit(b[k], k, inf);
      R=1/L;
```

(%o6) $b_k := a_k^{1/k}$

(%o7) $\lim(b_k) = 1$

(%o8) $R = 1$

Por lo tanto, la serie es absolutamente convergente en el intervalo $\left]-1,1\right[$. En los puntos $x=-1,\ x=1$ las series numéricas correspondientes son divergentes.

Ejemplo 05-4.4. Se considera la serie de potencias $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n^2}x^n$. En primer lugar la definiremos con wxMaxima y finalmente determinaremos su dominio de convergencia:

(%i1) a[k]:=1/k^2; s[k]:=a[k]*x^k;

(%o1) $a_k := \frac{1}{k^2}$

(%o2) $s_k := a_k\, x^k$

(%i3) makelist(s[k], k, 1, 10);

(%o3) $[x, \frac{x^2}{4}, \frac{x^3}{9}, \frac{x^4}{16}, \frac{x^5}{25}, \frac{x^6}{36}, \frac{x^7}{49}, \frac{x^8}{64}, \frac{x^9}{81}, \frac{x^{10}}{100}]$

(%i4) S[n]:=sum(s[k], k, 1, n);

(%o4) $S_n := \sum_{k=1}^{n} s_k$

(%i5) makelist(S[n], n, 1, 5);

(%o5) $[x, \frac{x^2}{4}+x, \frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}+x, \frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}+x, \frac{x^5}{25}+\frac{x^4}{16}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}+x]$

(%i6) b[k]:=(a[k])^(1/k);
'(lim(b[k])) = L : limit(b[k], k, inf);
R=1/L;

(%o6) $b_k := a_k^{1/k}$

(%o7) $\lim(b_k) = 1$

(%o8) $R = 1$

Por lo tanto, la serie es absolutamente convergente en el intervalo $\left]-1,1\right[$. En los puntos $x=-1,\ x=1$ las series numéricas correspondientes son convergentes. En definitiva, el dominio de convergencia de la serie es el intervalo $\left[-1,1\right]$.