Tema 5
Ejercicios resueltos

05.1. Calcular el término n-ésimo de la sucesión (a_n) tal que si $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ entonces:

a) $A_n = \dfrac{1}{n}$ b) $A_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$ c) $A_n = \dfrac{1}{n^2 + n}$

05.2. Se considera la serie numérica definida por

$$\sum_{n\geq 2} \frac{6}{4n^2 + 8n + 3}.$$

Razonar que se trata de una serie numérica telescópica y calcular su suma.

05.3. Estudiar la convergencia y, cuando sea posible, calcular la suma de las series numéricas siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-2)^n + 4^n}{(7.25)^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2.32}{2.43n^2 + 2.43n)}$ c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3.25n}{(n+1)!}$

05.4. Estudiar la convergencia y, si procede, calcular la suma de la serie numérica definida por

$$\sum_{n\geq 1} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

05.5. Estudiar la convergencia de las series numéricas siguientes, en función del número real x:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\left(2n^2+1\right)x^n}{4^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{3n^2 + 3n + x^n}{3x^{n+1}n\left(n+1\right)}$ $(x > 0)$

05.6. Calcular el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\log(n)}$$

Teniendo en cuenta el límite anterior, estudiar la convergencia de la serie numérica

$$\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

05.7. Se considera la serie numérica:

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}2^n$$

Definirla con wxMaxima y calcular las 10 primeras sumas parciales. Determinar un intervalo donde se encuentre la suma de la serie. Nota: Utilizar el comando “product” (vedlo con la ayuda del programa).

05.8. Estudiar la convergencia y, si procede, calcular la suma de la serie numérica definida por

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!(n+2)}$$

05.9. Se consideran las series alternadas:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{2.3n^2+1.45}$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{(2.1)^n-3.24}{n!}$

Razonar que se trata de series convergentes y determinar un intervalo de amplitud inferior a 1 centésima en el que se encuentre la suma de la serie.

05.10. Calcular el radio de convergencia y determinar el dominio de convergencia de las series de potencias:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{e^n}\right)(x-1)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{2}{3^n}\right)(x-2)^n$

En el caso b), calcular la suma de la serie en el punto $x_0 = 4$.