

Tema 4

Ejercicios resueltos

04.1. Demostrar que las siguientes sucesiones definidas por recurrencia son convergentes y calcular su límite:

a) $a_1 = \sqrt{2}; a_n = \sqrt{2a_{n-1}}, n \geq 2$

b) $a_1 = 3, a_n = \frac{5+a_{n-1}}{2}, n \geq 2$

04.2. Demostrar las propiedades siguientes:

a) Si $a > 0$, entonces $\lim(a^{1/n}) = 1$

b) Si $|a| < 1$, entonces $\lim(a^n) = 0$

c) $\lim(n^{1/n}) = 1$

04.3. Calcular el límite de las sucesiones de números reales siguientes:

a) $\frac{\sin(n)}{n}$

b) $\frac{n!}{n^n}$

c) $\frac{1}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n}}$

d) $\frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

e) $\log\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^n$

f) $\left(\frac{n+2}{2n}\right)^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$

g) $\left(\frac{n^2 + an + 1}{n^2}\right)^n$

h) $\frac{\log(e^n + e^{-n})}{n}$

04.4. Se considera la sucesión de números reales (a_n) definida por:

$$a_n = \frac{2n^2}{n+1}, \quad n \geq 1$$

- a) Calcular el límite: $L_1 = \lim (a_{n+1} - a_n)$.
- b) Calcular el límite: $L_2 = \lim \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^2} \right)$.

04.5. Se considera la sucesión de números reales $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Se pide:

- a) Estudiar la monotonía de la sucesión.
- b) Demostrar que la sucesión es acotada.
- c) Deducir razonadamente de los apartados anteriores que la sucesión es convergente.
- d) Dar un intervalo de amplitud menor que 0.1 dentro del cual se encuentre el límite de la sucesión.

04.6. Se consideran las sucesiones de números reales (a_n) y (b_n) definidas por:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad n \geq 1; \quad b_n = \log(n), \quad n \geq 2$$

- a) Estudiar la existencia y, si procede, calcular el valor del límite: $\lim \frac{a_n}{b_n}$.
- b) A partir de este resultado, decid que conclusión se puede afirmar sobre la sucesión (a_n) .

04.7. Se considera la sucesión numérica (x_n) definida por

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}, \quad \forall n \geq 1$$

Demostrar que la sucesión (x_n) es acotada superiormente e inferiormente para sucesiones convergentes y del mismo límite. Deducid la convergencia de (x_n) y el valor de $\lim(x_n)$.

04.8. Calcular el límite de la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right).$$

04.9. Si $a, b > 0$, se consideran las sucesiones de números reales $(x_n), (y_n)$ definidas por

$$x_n = \left(\frac{n+a}{n+2} \right)^{an+b} ; \quad y_n = \left(\frac{n+b}{n+1} \right)^{2n+a}$$

Determinar la relación entre los números a, b para que se cumpla que $\lim(x_n) = \lim(y_n)$.

04.10. Se considera la sucesión de Fibonacci (f_n) definida por:

$$\begin{cases} f_1 = 1, & f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, & \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Los términos de esta sucesión se llaman números de Fibonacci. Se pide:

a) Demostrar por inducción que se cumple

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

b) Si se considera la sucesión (R_n) construida mediante el cociente de dos números de Fibonacci consecutivos, es decir, definida por:

$$R_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

razonar que es una sucesión convergente y demostrar que su límite es $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (este número se conoce como razón áurea o número áureo).

c) Demostrar que la razón áurea se obtiene también en la división de un segmento en dos partes de manera que el cociente entre la parte más larga y la parte más corta es igual al cociente entre la longitud del segmento, es decir la suma de las dos partes, y la parte más larga.