Tema 3
Números reales. Números complejos

Objetivos

1. Cálculos con números reales.
2. Propiedades de los números reales.
3. Cálculos con números complejos.
4. Propiedades de los números complejos.

Contenido

03-1. Números reales.
03-2. Números complejos.

Referencias

AEM11 ALANINOS PRATS, J; EXTREMERA LIZANA, J; MUÑOZ RIVAS, P. (2011)
Cálculo con wxMaxima.

APJ11 ALANINOS PRATS, J; APARICIO DEL PRADO, C; EXTREMERA LIZANA, J; MUÑOZ RIVAS, P.; VILLENA MUÑOZ, A.R. (2011)
Prácticas de ordenador con wxMaxima.

BR09 BRUZÓN GALLEGO, M. DE LOS SANTOS; RAMÍREZ LABRADOR, JOSÉ (2009)
Modelos matemáticos con Maxima

BU07 DE BURGOS, JUAN (2007)
Cálculo Infinitesimal de una variable (segunda edición).

ES08 ESTELA CARBONELL, M. ROSA; SAÀ SEOANE, JOEL (2008)
Cálculo con soporte interactivo en moodle.

ES02 ESTEP, DONALD (2002)
Practical Analysis in one variable

JB01 JARAUTA BRAGULAT, EUSEBI (2001)
Anàlisi Matemàtica d’una variable. Fonaments i aplicacions.

RR05 REDONDO NEBLE, M. VICTORIA; RODRÍGUEZ GALVÁN, J. RAFAEL (2005)
Introducción a Maxima

RR08b RODRÍGUEZ RIOTORTO, MARIO (2008)
Curso intensivo i-MATH de software libre orientado a Ciencias e Ingeniería

VR09 VALLEJO RODRÍGUEZ, JOSÉ ANTONIO (2009)
Cálculo diferencial con Maxima

03-1.- Números reales.

Los cálculos de este apartado se encuentran en el fichero **Tema_03-1.wxm**.

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, dotado de estructura algebraica de cuerpo conmutativo con la suma y el producto ordinarios, constituye el conjunto numérico básico para el Análisis Matemático de funciones de variable real. Las operaciones internas de suma y producto de números reales así como sus propiedades, se suponen conocidas. La sintaxis de estas operaciones se ha visto en el Tema 1.

Se supone conocida también la ordenación de los números reales con una relación de orden total, así como la compatibilidad de las operaciones internas de $\mathbb{R}$ con esta relación de orden. Esta relación de orden permite definir los intervalos en la recta real:

Intervalo cerrado de origen a i extremo b: $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$

Intervalo abierto de origen a i extremo b: $]a,b[=\{x\in\mathbb{R}: a< x< b\}$

El intervalo abierto se designa también (a,b); en este Curso esta notación se hace servir sólo para indicar una pareja ordenada de números. Pueden definirse, de manera evidente, intervalos de tipo mixto.

Se supone conocida también la definición de la recta real ampliada, que resulta de incluir los símbolos $+\infty$ i $-\infty$; así mismo, se suponen conocidas las propiedades inherentes a esta definición, en particular, las reglas operativas relativas a los símbolos $+\infty$ i $-\infty$.

Un concepto importante es el de valor absoluto de un número real:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{si } x\geq 0 \\ -x, & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Se suponen conocidas las propiedades del valor absoluto y que este valor absoluto permite definir una estructura de espacio métrico mediante la distancia euclidiana ordinaria:

$$d(x,y)=|x-y|,\ x,y\in\mathbb{R},$$

Las propiedades de esta distancia se suponen también conocidas. En esta práctica se pretende consolidar la sintaxis de estos elementos, la definición de subconjuntos de números reales mediante ecuaciones o inecuaciones en las cuales interviene el valor absoluto y su expresión mediante intervalos. Todos estos conceptos se verán en los Ejemplos que siguen.

Ejemplo 03-1.- Determinar el intervalo de la recta real que corresponde al subconjunto de números reales definido por

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2+x-6<0\right\}.$$

Resolución. Designamos para $P(x)=x^2+x-6$. En primer lugar hay que determinar los puntos en que se cumple la condición $P(x)=0$:

```
(%i1) solve(x^2+x-6=0, x);
(%o1) [x=-3,x=2]
```

Ahora hay que analizar el signo del trinomio $P(x)=x^2+x-6$ en cada uno de los tres intervalos $]-\infty,-3[,]-3,2[$ i $]2,+\infty[$:

```
(%i2) assume(x<-3);
      is(x^2+x-6<0);
(%o2) [x<-3]
  (%o3) false
(%i4) forget(x<-3);
      assume(x>-3, x<2);
      is(x^2+x-6<0);
(%o4) [x<-3]
  (%o5) [x>-3,x<2]
  (%o6) true
(%i7) forget(x>-3, x<2);
      assume(x>2);
      is(x^2+x-6<0);
(%o7) [x>-3,x<2]
  (%o8) [x>2]
  (%o9) false
```

En conclusión, se cumple: A=]-3,2[.

Ejemplo 03-2.- Determinar el intervalo de la recta real que corresponde al subconjunto de números reales definido por:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{2x+1}{x+2}<1\right\}.$$

Resolución. En primer lugar vemos que la condición se puede expresar de forma equivalente mediante:

$$\frac{2x+1}{x+2}<1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x+1}{x+2}-1<0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x+1-(x+2)}{x+2}=\frac{x-1}{x+2}<0$$

Por lo tanto, trabajaremos con esta formulación equivalente más sencilla. En referencia al fichero Tema02-1.wxm, obsérvese que está estructurado indicando los ejemplos como una celda de texto; es conveniente comenzar cada nuevo apartado de cálculos con la anulación de asignaciones anteriores usando la instrucción "kill(all)".

Establecida pues la condición, ahora hay que verificar si se cumple o no esta en cada uno de los tres intervalos $]-\infty,-2[,\ ]-2,1[,\ ]1,+\infty[$:

```
(%i1) assume(x<-2);
      is((x-1)/(x+2)<0);
(%o1) [x<-2]
  (%o2) false
(%i3) forget(x<-2)$
      assume(x>-2, x<1);
      is((x-1)/(x+2)<0);
(%o4) [x>-2,x<1]
  (%o5) true
(%i6) forget(x>-2, x<1)$
      assume(x>1);
      is((x-1)/(x+2)<0);
(%o7) [x>1]
  (%o8) false
```

Esto permite concluir que la solución es A=]-2,1[.

Ejemplo 03-3.- Si a es un número real estrictamente positivo, demostrar que se cumple la equivalencia:

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a\,.$$

Resolución. En primer lugar introduciremos la condición de positividad:

```
(%i1) assume(a>0);
(%o1) [a>0]
```

Ahora verificaremos la condición para las dos posibilidades en relación al número *x*, en primer lugar suponiendo que es positivo y menor o mayor que *a* y en segundo lugar, que es negativo y menor o mayor que -*a*, es decir:

$$\begin{aligned} &x>0,\ x<a; \quad x>0,\ x>a \\ &x<0,\ x>-a; \quad x<0,\ x<-a \end{aligned}$$

Por lo tanto, introduciendo las condiciones en wxMaxima resulta:

```
(%i2) assume(x>0, x<a);
      is(abs(x)<a);
(%o2) [x>0,a>x]
(%o3) true
(%i4) forget(x>0, x<a)$
      assume(x>0, x>a);
      is(abs(x)<a);
(%o5) [x>0,x>a]
(%o6) false
(%i7) forget(x>0, x>a)$
      assume(x<0, x>-a);
      is(abs(x)<a);
(%o8) [x<0,x+a>0]
(%o9) true
(%i10) forget(x<0, x>-a)$
       assume(x<0, x<-a);
       is(abs(x)<a);
(%o11) [x<0,x+a<0]
(%o12) false
```

Por lo tanto, la equivalencia queda probada.

Ejemplo 03-4.- Determinar el intervalo de la recta real que corresponde al subconjunto de números reales definido por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 1\}.$$

Resolución. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, se puede afirmar que -1 < (x-2) < 1, con lo cual se concluye que A=]1,3[. Redactar como ejercicio la metodología de resolución sin tener en cuenta el ejemplo anterior.

Ejemplo 03-5.- Determinar el intervalo de la recta real que corresponde al subconjunto de números reales definido por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-4| - |x-1| < 0\}.$$

Resolución. En primer lugar verificaremos si se cumple la condición a la izquierda del valor menor de los dos valores de referencia, que son a=1, b=4:

```
(%i1) assume(x<1);
      is(abs(x-4)-abs(x-1)<0);
(%o1) [x<1]
(%o2) false
```

Ya sabemos que en este caso no se cumple. Ahora analizamos que pasa entre los dos valores de referencia:

```
(%i3) forget(x<1)$
      assume(x>1, x<4);
      is(abs(x-4)-abs(x-1)<0);
(%o4) [x>1,x<4]
(%o5) unknown
```

La respuesta del programa significa que no puede decidir sobre la pregunta formulada, ya que la condición en una parte del intervalo es cierta y en la otra no; dividiremos el intervalo en dos partes iguales y veremos que pasa en cada una de ellos:

```
(%i6) forget(x>1, x<4)$
      assume(x>1, x<5/2);
      is(abs(x-4)-abs(x-1)<0);
```

(%o7) $[x>1, x<\frac{5}{2}]$

```
(%o8) false
(%i9) forget(x>1, x<5/2)$
      assume(x>5/2, x<4);
      is(abs(x-4)-abs(x-1)<0);
```

(%o10) $[x>\frac{5}{2}, x<4]$

```
(%o11) true
```

Finalmente, analizaremos que pasa a la derecha del mayor de los dos valores:

```
(%i12) forget(x>1, x<4)$
       assume(x>4);
       is(abs(x-4)-abs(x-1)<0);
(%o13) [x>4]
(%o14) true
```

Por lo tanto, la solución es A=]5/2, +∞[.

03-2.- Números complejos

Los cálculos de este apartado se encuentran en el fichero **Tema_03-2.wxm**.

El conjunto de los números complejos se define como el conjunto de los pares ordenados de números reales, es decir:

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Si un número complejo se escribe $z = (x, y)$ y esta representación se llama *forma cartesiana* del número complejo. El primer número real de la pareja se llama "parte real de *z*" i se escribe x = Re(*z*); el segundo número real de la pareja se llama "parte imaginaria de *z*" i se escribe $y = \mathrm{Im}(z)$.

Esta forma o representación no es la que se utiliza en wxMaxima para representar los complejos: se usa la llamada forma binómica que utiliza la unidad imaginaria $i = (0,1)$, de manera que entonces se escribe $z = x + yi$. La representación en wxMaxima de la unidad imaginaria es %i. Para mayor comodidad es conveniente usar variables para designar los números complejos; a demás, si se quiere que en la salida quede explicitado el símbolo otorgado a un complejo, hay que escribirlo con la sintaxis que se puede ver a continuación:

```
(%i1) 'z=z:x + y* %i;
      'Re(z)=realpart(z);
      'Im(z)=imagpart(z);
(%o1) z = %i y + x
(%o2) Re(%i y + x) = x
(%o3) Im(%i y + x) = y
```

En el conjunto de los números complejos se definen dos operaciones internas, suma y producto, que se pueden calcular fácilmente con wxMaxima. La sintaxis de la suma y el producto se ilustra a continuación; observar que, si no se indica explícitamente que se desarrolle, el producto se efectúa en forma simbólica, es decir, se deja indicado como tal. En wxMaxima hay que aplicar la instrucción "rectform" para explicitar que se quiere efectuado el resultado y expresado en forma binómica. Así pues:

```
(%i4) 'z1=z1:a+b*%i;        'z2=z2:c+d*%i;
      '(z1+z2)=z1+z2;       '(z1*z2)=z1*z2;       '(z1*z2)=rectform(z1*z2);
(%o4) z1 = %i b + a
(%o5) z2 = %i d + c
(%o6) z2 + z1 = %i d + c + %i b + a
(%o7) z1 z2 = (%i b + a) (%i d + c)
(%o8) z1 z2 = %i (a d + b c)-b d + a c
```

```
(%i9) 'z3=z3: 2.432+3.789*%i;           'z4=z4: 5.321+6.987*%i;
      '(z3+z4)=z3+z4;                   '(z3-z4)=z3-z4;
      '(z3*z4)=rectform(z3*z4);
```

(%o9) $z3 = 3.789\ \%i + 2.432$

(%o10) $z4 = 6.987\ \%i + 5.321$

(%o11) $z4 + z3 = 10.776\ \%i + 7.753$

(%o12) $z3 - z4 = -3.198\ \%i - 2.889$

(%o13) $z3\ z4 = 37.15365300000001\ \%i - 13.533071$

La sintaxis para efectuar el cociente entre dos complejos, es decir, el producto de un complejo por el inverso de otro complejo respecto del producto, es sencilla. Hay que tener presente que también se ha de especificar con la instrucción "rectform" que el cociente se quiere desarrollar, ya que en caso contrario sólo se efectúa en forma simbólica y se deja indicado. Vemos la sintaxis del cociente de complejos:

```
(%i14) 1/z2;        z1*(1/z2);        '(z1/z2)=z1/z2;
```

(%o14) $\dfrac{1}{\%i\ d + c}$

(%o15) $\dfrac{\%i\ b + a}{\%i\ d + c}$

(%o16) $\dfrac{z1}{z2} = \dfrac{\%i\ b + a}{\%i\ d + c}$

```
(%i17) '(z1/z2)=rectform(z1/z2);
```

(%o17) $\dfrac{z1}{z2} = \dfrac{b\ d + a\ c}{d^2 + c^2} + \dfrac{\%i\ (b\ c - a\ d)}{d^2 + c^2}$

```
(%i18) '(z3/z4)=rectform(z3/z4);
```

(%o18) $\dfrac{z3}{z4} = 0.041084341863689\ \%i + 0.51100475410667$

El conjugado de un número complejo se obtiene con la instrucción "conjugate":

```
(%i19) conjugate(z1);
```

(%o19) $a - \%i\ b$

El módulo de un número complejo $z = a + bi$ se obtiene con la instrucción "abs":

```
(%i20) abs(z1);        (abs(z1))^2;
```

(%o20) $\sqrt{b^2 + a^2}$

(%o21) $b^2 + a^2$

El producto de un complejo por su conjugado da como resultado el cuadrado del módulo:

```
(%i22) rectform(z1*conjugate(z1));
(%o22) b^2+a^2
```

Si se considera el número complejo $z = a + bi$, se define el argumento de este número complejo, notado arg(z), mediante:

$$\sin(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|};\ \cos(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|};\ \tan(\arg(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$$

En wxMaxima el argumento de un complejo se obtiene con la función notada "atan2" que tiene dos argumentos y calcula el ángulo que tiene por tangente el cociente del primero entre el segundo. La sintaxis es "atan2(b,a)", es decir, escribiendo primero la parte imaginaria y después la parte real. La instrucción se aplica incluso en el caso en que $a = 0$. Por ejemplo:

```
(%i23) atan2(sqrt(3),-1);          atan2(1,0);
       atan2(-1,0);                atan2(0,-1);        atan2(0,1);
(%o23) 2π/3
(%o24) π/2
(%o25) -π/2
(%o26) π
(%o27) 0
```

Hay que recordar que el argumento de un complejo es un conjunto de ángulos y por lo tanto:

$$\arg(-1 + i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

El argumento principal corresponde a $k = 0$.

La representación exponencial de un complejo se obtiene mediante:

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) = |z|\cos(\arg(z)) + i|z|\sin(\arg(z)) = |z|e^{i\arg(z)}$$

En wxMaxima se obtiene esta forma exponencial con la instrucción "polarform":

```
(%i28) polarform(z1);
(%o28) sqrt(b^2+a^2) %e^(%i atan2(b,a))
(%i29) z5:(-1)+(sqrt(3))*%i;
       polarform(z5);
(%o29) sqrt(3) %i-1
(%o30) 2 %e^(2 %i π/3)
(%i31) polarform(z3);
       polarform(z4);
(%o31) 4.502348831443428 %e^(1.000166135924386 %i)
(%o32) 8.782437588733552 %e^(0.91993956282176 %
```

Las potencias de números complejos se pueden calcular fácilmente en forma polar o exponencial, ya que si $z = a + bi = |z|e^{i\theta}$ i $n \in \mathbb{N}$ entonces:

$$(z)^n = \left(|z|e^{i\theta}\right)^n = |z|^n e^{in\theta}$$

El programa wxMaxima efectúa estrictamente esta operación:

```
(%i33) (polarform(z1))^n;
(%o33) (b^2+a^2)^(n/2) %e^(%i atan2(b,a) n)
```

Así, por ejemplo:

```
(%i34) (z3)^3;        polarform((z3)^3);
(%o34) (3.789 %i+2.432)^3
(%o35) 91.26776600277026 %e^3.000498407773157
```

Ahora se puede obtener esta potencia en la forma binómica:

```
(%i36) rectform(polarform((z3)^3));
(%o36) 12.83467293899997 %i-90.36081164799998
```

Por supuesto este resultado se puede obtener directamente calculando la potencia en forma binómica:

```
(%i37) expand(z3^3);
(%o37) 12.834672939 %i-90.36081164800001
```

También se pueden llevar a cabo operaciones con potencias de complejos:

```
(%i38) u1:(z3)^2;        u2:(z4)^4;        u3=expand(u1*u2);
```

(%o38) $(3.789\ \%i+2.432)^2$

(%o39) $(6.987\ \%i+5.321)^4$

(%o40) $u3=99322.25822814016-68402.22011408709\ \%i$

```
(%i41) ((z3)^5*(z4)^6)/(z3+z4)^3;
```

(%o41) $\dfrac{(3.789\ \%i+2.432)^5\,(6.987\ \%i+5.321)^6}{(10.776\ \%i+7.753)^3}$

```
(%i42) rectform(%);
```

(%o42) $357344.1360816646\ \%i+63138.19216269674$

Se pueden calcular raíces n-ésimas de complejos como potencias de exponente 1/n. Recordar que si

$$z=a+bi=|z|e^{i\theta},$$

entonces las raíces n-ésimas de este complejo son $u_0,u_1,\ldots,u_{n-1}$, y se verifica que:

$$|u_k|=\left(|z|\right)^{1/n};\ \arg(u_k)=\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n},\quad k=0,1,\ldots,n-1$$

Hay que tener en cuenta, pero, que wxMaxima sólo da como resultado una de estas raíces, que es u_0 y si se quieren calcular el resto de raíces hay que construirlas explícitamente. Así, si se quieren calcular las tres raíces cúbicas del complejo $z=1-i$, entonces los cálculos con wxMaxima dan como resultado:

```
(%i1) z10:1-%i;           abs(z10);
      atan2(-1,1);        polarform(z10);
```

(%o1) $1-\%i$

(%o2) $\sqrt{2}$

(%o3) $-\dfrac{\pi}{4}$

(%o4) $\sqrt{2}\ \%e^{-\frac{\%i\ \pi}{4}}$

```
(%i5) u0:(z10)^(1/3);        polarform(u0);
```

(%o5) $(1-\%i)^{1/3}$

(%o6) $2^{1/6}\ \%e^{-\frac{\%i\ \pi}{12}}$

(%i7) theta_1:(-%pi/12)+(2*%pi)/3;

(%o7) $\frac{7\,\pi}{12}$

(%i8) u1:(2^(1/6))*exp(%i*7*%pi/12);

(%o8) $2^{1/6}\,\%e^{\frac{7\,\%i\,\pi}{12}}$

(%i9) theta_2:(-%pi/12)+(4*%pi)/3;

(%o9) $\frac{5\,\pi}{4}$

(%i10) u2:(2^(1/6))*exp(%i*5*%pi/4);
polarform(u2);

(%o10) $2^{1/6}\left(-\frac{\%i}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(%o11) $2^{1/6}\,\%e^{-\frac{3\,\%i\,\pi}{4}}$

Ahora se pueden expresar las tres raíces cúbicas en forma binómica:

(%i12) rectform(u0),numer; rectform(u1),numer;
rectform(u2),numer;

(%o12) 1.084215081491351-0.29051455550725 %i

(%o13) 1.084215081491351 %i-0.29051455550725

(%o14) -0.7937005259841 %i-0.7937005259841

Finalmente, se puede verificar que se han determinado las raíces buscadas, calculando el cubo de cada una de las raíces cúbicas y comprobando que el resultado es el número complejo inicial. En efecto:

(%i15) polarform(u0^3);
polarform(u1^3);
polarform(u2^3);

(%o15) $\sqrt{2}\,\%e^{-\frac{\%i\,\pi}{4}}$

(%o16) $\sqrt{2}\,\%e^{-\frac{\%i\,\pi}{4}}$

(%o17) $\sqrt{2}\,\%e^{-\frac{\%i\,\pi}{4}}$