

## Tema 3

### Ejercicios resueltos

**03.1.** Demostrar que si  $x \leq y$  y  $a < 0$ , entonces se cumple  $xa \geq ya$ .

**03.2.** Si  $x, y \in \mathbb{R}$  son números reales no nulos tales que  $x < y$ , estudiar la relación de desigualdad que hay entre sus inversos  $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in \mathbb{R}$ .

**03.3.** Demostrar que si  $a \in \mathbb{R}$  es tal que  $a^2 < a$ , entonces ha de ser  $0 < a < 1$ .

**03.4.** Demostrar que si  $a \in \mathbb{R}$  es tal que  $a > 0$ , entonces se cumple  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ .

**03.5.** Demostrar que si  $a, b \in \mathbb{R}$  son tales que  $a < b$  y  $b > 0$ , entonces se cumple

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left( \frac{a+b}{2} \right)^2$$

**03.6.** Demostrar que si  $a, b \in \mathbb{R}$  son tales que  $a, b \geq 0$ , entonces se cumple

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

**03.7.** Demostrar que si  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $A = \{a, b\}$ , entonces se cumple

$$\max(A) = \frac{a+b+|a-b|}{2} ; \quad \min(A) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

**03.8.** Determinar los intervalos de la recta real que corresponden a los subconjuntos siguientes:

a)  $|x-1|+|x+3|=4$       b)  $|x-1|+|x+5|=6$   
 c)  $|x-1|+|x-2|=1$       d)  $|x+5|+|x|=5$

**03.9.** Determinar los intervalos de la recta real que corresponden a los subconjuntos siguientes:

a)  $|2x+7|\geq 3$       b)  $|x+1|<4$   
 c)  $|x-1|+|x+2|<2$       d)  $|x-1|+|x+2|\leq|x-3|$

**03.10.** Determinar los intervalos de la recta real que corresponden a los subconjuntos siguientes:

a)  $\left|\frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}\right|<1$       b)  $\left|\frac{x^2-4x+2}{(x+2)^2}\right|<1$

**03.11.** Calcular:

a)  $\frac{3}{i}+\frac{2i}{2+i}+\frac{2+3i}{1+2i}$

b) los números  $a, b \in \mathbb{R}$  sabiendo que  $(-5+ai)(b+19i)=3+2i$

c) el número  $a \in \mathbb{R}$  sabiendo que  $\frac{3-2ai}{4-3i}$  está situado en la bisectriz del primer cuadrante

**03.12.** Efectuar las operaciones:

a)  $\frac{2-3i}{(2+3i)(1+i)}-\frac{3+i}{4(2-i)}$       b)  $(1-2i)^{32}$       c)  $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}$

**03.13.** Expresar en forma polar:

- a)  $1 + 2i$                                       b)  $5 + 6i$   
c)  $1.32 + 5.67i$                               d)  $(5 + 6i)^3$

**03.14.** Calcular  $x \in \mathbb{R}$  tal que el complejo  $z = \frac{2 + xi}{3 - xi}$  sea imaginario puro y calcular el cociente.

**03.15.** Expresar en forma binómica:

- a)  $3 \cdot \exp\left(i \cdot \frac{\pi}{3}\right)$                                       b)  $\sqrt{2} \cdot \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right)$   
d)  $4.62 \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{3}\right)$                                       e)  $5.64 \cdot \exp\left(i \frac{5\pi}{3}\right)$

**03.16.** Calcular:

- a)  $\sqrt[3]{1 + 2i}$                                       b)  $\sqrt[4]{5 + 6i}$                                       c)  $\sqrt[5]{2 + i}$   
d)  $\sqrt[3]{1.42 + 2.41i}$                                       e)  $\sqrt[5]{1 - \sqrt{3}i}$                                       f)  $\frac{\sqrt[3]{-1 + i}}{\sqrt{1 + \sqrt{3}i}}$

**03.17.** Determinar los números complejos  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  sabiendo que su cociente es 3, que la suma de sus argumentos es  $\pi/3$  y que la suma de sus módulos es 8.

**03.18.** Un número complejo  $z \in \mathbb{C}$  es tal que una de sus raíces cúbicas es  $3i$ . Calcular este número complejo y las otras raíces cúbicas.

**03.19.** Determinar los complejos  $z \in \mathbb{C}$  tales que:

- a)  $z^3 + (1 - 3i)z^2 + (3 + i)z + i = 0$                                       b)  $z^4 + z^2 + 1 = 0$   
c)  $z^3 - iz + (-1 + i) = 0$                                       d)  $z^3 + (1 + i)z^2 + (-2 + i)z - 2i = 0$

**03.20.** Determinar el conjunto de los números complejos  $z \in \mathbb{C}$  tales que:

a)  $|3z + 4| = 1$

b)  $\frac{|z - 2i|}{|z + 2i|} = 4$

d)  $|3z + 1| - |3z| \geq 0$

e)  $\Re\left(\frac{3}{z}\right) + \Im\left(\frac{4}{z}\right) < 2$