Tema 12

Ejercicios resueltos

12.1. Verificar si las funciones que se dan son soluciones respectivas de las ecuaciones diferenciales con las condiciones iniciales que eventualmente se indican:

- a) $y = e^{-t} + t - 1$, $y' + y = t$, $y(0) = 0$;
- b) $y = 8 \cos(3t) + 6 \sin(3t)$, $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 18$
- c) $27y^2 - 8t^3 = 0$, $(y')^3 - y = 0$, $y(0) = 0$
- d) $y = Ax^3 + Bx^{-4} - \frac{x^2}{3}$, $x^2y'' + 2xy' - 12y - 2x^2 = 0$
- e) $xy^2 - y^3 - C = 0$, $y + (2x - 3y)y' = 0$

12.2. Encontrar la ecuación diferencial correspondiente a cada una de las familias de curvas planas indicadas:

- a) $y = x + Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$
- b) $x^2 - ay^2 = 1$, $a \in \mathbb{R}$
- c) $y = e^{A+x}$, $A \in \mathbb{R}$
- d) $y = A + Bx^2$, $A, B \in \mathbb{R}$

12.3. Determinar la ecuación diferencial de las familias de curvas planas definidas por las condiciones que se indican:

- a) Circunferencias de radio unidad el centro de las cuales está en la bisectriz del primer cuadrante.
- b) Circunferencias de radio R el centro de las cuales está en la bisectriz del primer cuadrante.

- c) Circunferencias de radio 2 el centro de las cuales está en la recta $x = 1$.
- d) Rectas que están a distancia unidad del origen.

12.4. Determinar la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

- a) $(1 + e^x)yy' = e^x$
- b) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$
- c) $1 + 2y = (x^2 - 4)y'$

12.5. Determinar la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

- a) $y' + 2ty - 4t = 0$
- b) $xy' - y - x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
- c) $x' - \frac{1}{t-2}x = 2(t-2)^2$
- d) $y' + \frac{1}{t \log(t)}y = \frac{1}{t}$

12.6. Determinar la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

- a) $y' - y - xy^5 = 0$
- b) $x' + 2tx + tx^4 = 0$
- c) $x' + x - x^2(\cos(t) - \sin(t)) = 0$

12.7. Determinar la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

- a) $y' = -2 - y + y^2$ sabiendo que $f_1(x) = 2$ es solución particular;
- b) $y' = 2x^2 + \frac{1}{x}y - 2y^2$ sabiendo que $f_1(x) = x$ es solución particular;

12.8. En un cultivo de levadura, la cantidad de fermento activo crece a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si en una hora se duplica la cantidad, cuántas veces se puede esperar que se tenga la cantidad original pasados 165 minutos?

12.9. Una sustancia radioactiva se descompone a una velocidad proporcional a la cantidad de sustancia presente. Si la mitad de la cantidad inicial desaparece en 1600 años, encontrar el porcentaje de pérdida en 100 años.

12.10. La *ley de Newton* afirma que si se tiene un cuerpo a una temperatura T y la temperatura del medio ambiente T_{amb} es menor que T , la velocidad de enfriamiento del cuerpo es proporcional a la diferencia $T - T_{\text{amb}}$. Si la temperatura ambiente es $T_{\text{amb}} = 15.4^{\circ}\text{C}$ y el cuerpo se enfría en 30 minutos desde 95.6°C a 57.4°C , calcular el tiempo que tardará en enfriarse hasta 25.1°C . Calcular la temperatura del cuerpo después de 120 minutos de haberse iniciado el proceso de enfriamiento.

12.11. La población de un país era en un cierto momento de 100 millones de habitantes. Su velocidad de crecimiento era en aquel momento tal que, suponiendo que en todo instante es proporcional a la población existente, la población se habría doblado en 50 años. Investigaciones posteriores pusieron de manifiesto que la hipótesis más adecuada sobre el crecimiento de la población era que debía ser proporcional en cada instante, no solamente a la población existente, sino también a la diferencia entre esta población y otra población máxima que se estimó en 300 millones. Aceptada esta ley, determinar en cuanto tiempo tardará en doblarse esta población.

12.12. Un producto químico se disuelve en agua a una velocidad proporcional al producto entre la cantidad que aún no se ha disuelto y la diferencia entre la concentración de saturación y la concentración actual. Se sabe que en 100 g de una disolución saturada hay disueltos 50 g de la sustancia. Si se disuelven 30 g del producto en 100 g de agua se observa que en 2h se han disuelto 10 g. ¿Qué cantidad de sustancia se habrá disuelto en 5h ?

12.13. Una bala se introduce en un tablón de madera de 10cm de grueso. La velocidad de entrada es 200m/s y la de salida de 80m/s. Suponiendo que la resistencia del tablón al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, calcular el tiempo que tarda la bala en atravesar el tablón. Haced una representación gráfica de la variación de la velocidad de la bala en su movimiento.

12.14. Se quiere renovar en 10 minutos el aire de un aula que contiene el 0.12% de su volumen de dióxido de carbono (CO_2) y hacer llegar la concentración al 0.06%. Las dimensiones del aula son $12 \times 8 \times 4$ metros. Calcular el caudal (m^3/min) que hay que dimensionar para esta renovación, sabiendo que el aire del ambiente contiene el 0.04% de su volumen de dióxido de carbono. Haced una representación gráfica de la evolución de la concentración de dióxido de carbono en función del tiempo. (Suponed que en todo momento la concentración de dióxido en el aula es homogénea).

12.15. Calcular la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

- a) $y'' - y' - 2y = 0$ b) $y'' + y' - 6y = 0$
c) $y'' + 6y' + 9y = 0$ d) $y'' + 9y = 0$

12.16. Calcular la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

- a) $y'' - y' - 2y = t$
- b) $y'' + y' - 6y = 1 + t$
- c) $y'' - 3y' + 2y = e^{5t}$
- d) $y'' + 9y = t \cos(t)$
- e) $y'' + 4y = \cos(2t) + \sin(2t)$

12.17. Se cuelga una masa de 10kg de un muelle y entonces se observa un desplazamiento de 70cm respecto de la posición inicial. A continuación la masa se pone en movimiento desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 1m/s. Calcular la posición de la masa en función del tiempo sabiendo que el aire ejerce una resistencia proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad de 90N.

12.18. Se cuelga una masa de 10kg de un muelle que tiene una constante de 140N/m. La masa se pone en movimiento desde la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 1m/s y aplicando una fuerza externa de valor $5\sin(t)$. Calcular la posición de la masa en función del tiempo sabiendo que el aire ejerce una resistencia proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad de 90N.

12.19. Un circuito RLC en serie está constituido por una resistencia óhmica $R=180\Omega$, un condensador de capacidad $C=1/280$ faradio, una bobina de coeficiente de autoinducción $L=20H$ y una fuente de fuerza electromotriz $E(t)=10\sin(t)$. Suponiendo que no hay carga inicial en el condensador, que la corriente eléctrica inicial es $I(0) = 1A$, calcular la carga del condensador en función del tiempo.

12.20. Aplicando el método de Runge-Kutta de wxMaxima, resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales siguientes:

- a) $y' = \sqrt{y+t}$; en $[0,10]$, con la condición inicial $y(0) = 0$; $h = 0.5, h = 0.2$;
- b) $y' = (t + y - 1)^2$; en $[0,0.5]$, con la condición inicial $y(0) = 2$; $h = 0.05, h = 0.01$;
- c) $y' = -\log(y+t-2)$; en $[0,10]$, con la condición inicial $y(0) = 5$; $h = 0.5, h = 0.2$.

Verificar que el programa no permite obtener analíticamente la solución y hacer una representación gráfica de cada aproximación numérica.