Tema 11
Ejercicios resueltos

11.1. Se considera la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \left(\sin(x+y^3), \cos(x) - e^y\right).$$

Razonar que la función es localmente invertible en un entorno del punto (0,0) y calcular $Jf^{-1}(0,0)$.

11.2. Se considera la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \left(e^{2x} - e^y, e^y\right).$$

1) Demostrar que la función es localmente invertible en un entorno $U(x,y)$ de cada punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2) Calcular la expresión analítica de la función inversa definida en el subconjunto $V(u,v) = f\left(U(x,y)\right)$.
3) Comprobar que las matrices jacobianas de *f* en (x,y) y de f^{-1} en $(u,v) = f(x,y)$ son inversas.

11.3. Se considera la función $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \left(\frac{x^4+y^4}{x}, \sin(x) + \cos(x)\right),\ (x,y) \in A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$$

a) Razonar la diferenciabilidad de *f* en A.
b) Determinar los puntos del dominio de la función en la que esta es localmente invertible.

c) Calcular la aproximación lineal de la función inversa f^{-1} en un entorno del punto $f(\pi, \pi)$.

11.4. Se considera la ecuación $x^2 y + 4x^4 y^3 - 5 = 0$. Estudiar si esta ecuación define localmente una función $y = y(x)$ en un entorno del punto (1,1). En caso afirmativo, calcular las derivadas de primer y segundo orden de esta función en el punto *a* = 1.

11.5. Se considera la ecuación $x + 2y + z + 3\cos(xyz) = 0$. Estudiar si esta ecuación define localmente una función $z = z(x, y)$ en un entorno del punto (0, 0, –3). En caso afirmativo, calcular las derivadas parciales $D_x z(0,0)$, $D_y z(0,0)$.

11.6. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - u^2 - v^2 = 0 \\ y - 2uv = 0 \end{cases}$$

y el punto $P(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0,2,1,1)$. Se pide:

1) Determinar el sistema lineal que aproxima el sistema dado en un entorno del punto *P*.

2) Demostrar que el sistema dado define en un entorno del punto *P* dos funciones implícitas diferenciables $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ tales que $u(0,2) = 1, v(0,2) = 1$.

3) Calcular las derivadas parciales $D_x u(0,2), D_y u(0,2), D_x v(0,2), D_y v(0,2)$.

11.7. Se considera la ecuación

$$xyz + \sin(z-2) - x^2 y^2 - x - y + 1 = 0 \quad [1]$$

1) Calcular una aproximación lineal de esta ecuación en un entorno del punto $P(x_0, y_0, z_0) = (1,1,2)$.

2) Calcular el plano tangente y la recta normal a la superficie definida por [1] en el punto *P*.

3) Demostrar que la ecuación [1] define implícitamente una función $z = z(x, y)$ en un entorno de *P* y calcular una aproximación lineal de esta función en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (1,1)$.

11.8. Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^3z + y^3u^2 - 1 = 0 \\ xy^2 + 2zu^3 = 0 \end{cases}$$

y el punto $P(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0,1,0,1)$. Se pide:

1) Determinar el sistema lineal que aproxima el sistema dado en un entorno del punto *P*.

2) Demostrar que el sistema dado define en un entorno del punto *P* dos funciones implícitas diferenciables $z = z(x, y)$, $u = u(x, y)$ tales que $z(0,1) = 0, u(0,1) = 1$.

3) Calcular las derivadas parciales $D_x z(0,1), D_x u(0,1), D_y z(0,1), D_y u(0,1)$.

4) Si se designa por $\varphi(x, y) = \left(z(x, y), u(x, y)\right)$ demostrar que la función φ es localmente invertible en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (0,1)$ y calcular $J\varphi^{-1}(0,1)$.

11.9. Se consideran las funciones $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$f(x, y) = e^x + e^y, (x, y) \in A; \quad g(t) = \left(t^2, \log(t)\right),\ t \in B$$

a) Razonar la diferenciabilidad de estas funciones y calcular su respectivo campo de diferenciabilidad. Calcular las matrices jacobianas $Jf(x, y)$ y $Jg(t)$.

b) Razonar la diferenciabilidad de las funciones compuestas $F = g \circ f$, $G = f \circ g$ y determinar su respectivo campo de diferenciabilidad. Calcular las matrices jacobianas de estas funciones compuestas en un punto cualquiera de su campo de diferenciabilidad. Calcular $JF(1,0)$, $JG(1)$.

c) Verificar que la función *G* es invertible en un entorno de *t*=1 y calcular la aproximación lineal de su función inversa en un entorno del punto *G*(1).

11.10. Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de las siguientes funciones en el punto indicado:

$f(x, y) = x^3 + y^2 + xy^2$ P = (1, 2)

$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ P = (0, 0)

$f(x, y, z) = \exp(x + y + z)$ P = (0, 0, 0)

11.11. Calcular el polinomio de Taylor de grado 2, 3 y 4 de la función $f(x, y) = e^x \cos(y)$ en $(0,0)$.

11.12. Se considera la ecuación

$$x\sin\left(\frac{\pi}{y}\right) - z^2 y + 1 = 0$$

a) Demostrar que esta ecuación define una función implícita diferenciable $z = z(x, y)$ en un entorno del punto $P(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -1)$.
b) Calcular el plano tangente y la recta normal a la superficie $z = z(x, y)$ en el punto P.
c) Calcular el polinomio de Taylor de grado 1 de la función $z(x, y)$ en el punto (1,2).
d) Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $z(x, y)$ en el punto (1,2).

11.13. Determinar los puntos estacionarios y estudiar los extremos locales y puntos de silla, si existen, de las funciones:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 3$ b) $f(x, y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$

Haced una representación gráfica de cada función en un entorno adecuado de los puntos estacionarios.

11.14. Se considera la función real de dos variables $f(x, y) = x^3 + 3y^3 - x^2 + y^2$. Calcular la función que establece la derivada direccional de esta función en un punto (*x*,*y*) en la dirección definida por el vector $\vec{u} = (1, 2)$. Estudiar los extremos de esta función, es decir, determinar el punto en el que esta derivada direccional alcanza un extremo y determinar el tipo de extremo.

11.15. Se considera la ecuación

$$xyz + \sin(z-3) - x^2 y^2 - x - y = 0.$$

Demostrar que esta ecuación define localmente una función $z = z(x, y)$ en un entorno del punto (1, 1, 3). Estudiar la existencia de un extremo local de la función $z = z(x, y)$ en el punto (1, 1) y clasificadlo.

11.16. Razonar la existencia y calculad, cuando existan, los extremos absolutos de las siguientes funciones en el conjunto *A* que se indica:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ *A*: segmento $\{x + y = 1,\ 0 \le x \le 1\}$
b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ *A*: región del plano $\{x^2 + y - 1 \le 0,\ y \ge 0\}$
c) $f(x, y) = x + y$ *A*: región del plano $\{x^2 + y^2 - 1 \le 0,\ y \ge 0\}$

11.17. Determinar el paralelepípedo rectangular de volumen máximo contenido en el primer octante con un vértice en el origen y el vértice opuesto en el plano de ecuación $x+2y+3z-5=0$.

11.18. Un pentágono está construido con un rectángulo y un triángulo isósceles que tiene la base sobre uno de los lados del rectángulo. Los lados iguales del triángulo tienen una longitud doble de la base del rectángulo, sobre el que se ha construido el triángulo. Sabiendo que el perímetro del pentágono tiene un valor constante P, determinar las dimensiones del pentágono que tiene área máxima. Haced una representación gráfica del área del pentágono suponiendo que P = 100cm.

11.19. Se considera la elipse de ecuación $4x^2+5xy+4y^2-8=0$. Calcular los puntos de esta curva que tienen distancia máxima y distancia mínima en el origen de coordenadas.

11.20. Una lata de refresco estándar tiene una capacidad de 330 cl. Calcular las dimensiones de la lata para que requiera la mínima cantidad de material en su fabricación. Hacer una representación gráfica para ilustrar la solución del problema.