Tema 10
Ejercicios resueltos

10.1. Determinar el campo de existencia de las funciones siguientes:

a) $f(x,y)=\log\left(\dfrac{x-1}{y+2}\right)$

b) $f(x,y)=\dfrac{x+2y}{\sqrt{2y-x}}$

c) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y)=\log\left(y-3x^2\right)$

10.2. Calcular los límites de las siguientes funciones reales de dos variables:

a) $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{-xy^2}{x^2+y^4}$

c) $\lim\limits_{(1,0)}\dfrac{\sin((x-1)y)}{3y}$

d) $\lim\limits_{(0,0)}2xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

10.3. Calcular los límites:

a) $\lim\limits_{(0,1)}\dfrac{e^{x/2y}-1}{x}$

b) $\lim\limits_{(0,0)}\dfrac{\log(xy+1)}{x^2+y^2}$

c) $\lim\limits_{(0,0)}\left(1+\sin(x^2y)\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$

d) $\lim\limits_{(0,0)}\left(2+xy\right)^{\frac{-1}{x^2y^2}}$

10.4. Calcular los límites siguientes:

$$\text{a) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(e^{xy}-1\right)\sin\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \qquad \text{b) } \lim_{(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

10.5. Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones reales de dos variables:

a) $f(x,y)=x^4+3x^2-4xy$ b) $f(x,y)=4xy+\dfrac{x}{2y}-\sqrt{x^2+3y^2}$

c) $f(x,y)=\exp\left(-\dfrac{y^2}{2x}\right)$ d) $f(x,y)=\log\left(\dfrac{x+2}{3\sqrt{y}}\right)$

10.6. Calcular las derivadas parciales en el origen de las siguientes funciones reales de dos variables:

a) $f(x,y)=\begin{cases} x^2/2y, & \text{si } y\neq 0 \\ 0, & \text{si } y=0 \end{cases}$ b) $f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{si } x\geq 0 \\ \sqrt{x^2+y^2}, & \text{si } x<0 \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases} (3y+1)x, & \text{si } y\geq 0 \\ x-x^2-y^2, & \text{si } y<0 \end{cases}$ d) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin(xy), & \text{si } x\neq 0 \\ y, & \text{si } x=0 \end{cases}$

10.7. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones reales de dos variables y calcular su matriz jacobiana en un punto cualquiera en el que la función sea diferenciable:

a) $f(x,y)=x^4+3x^2-4xy$ b) $f(x,y)=4xy+\dfrac{x}{2y}-\sqrt{x^2+3y^2}$

c) $f(x,y)=\exp(-\dfrac{y^2}{2x})$ d) $f(x,y)=x^2y+\sin(xy)$

10.8. Calcular la derivada direccional de las siguientes funciones reales de dos variables en el punto y según la dirección del vector que se indica:

a) $f(x,y)=\log\sqrt{2x^2+3y^2}$, $a=(1,2)$; $\vec{u}=(2,-1)$

b) $f(x,y)=x^4+3x^2-4xy$, $a=(1,-3)$; $\vec{u}=(-2,-1)$

c) $f(x,y)=x^4+\exp(3x^2-4xy)$, $a=(2,3)$; $\vec{u}=(-3,-2)$

10.9. Se considera la función real de dos variables definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{xy}, & \text{si } xy\neq 0\\ x+y, & \text{si } xy=0\end{cases}$$

a) Calcular las derivadas parciales en el origen y razonar la existencia del vector gradiente en el origen y calcularlo, si procede. b) Razonar si es cierta la afirmación: para cualquier vector unitario $\vec{u}=\left(u_1,u_2\right)$, se verifica la igualdad $D_{\vec{u}}\, f(0,0)=u_1+u_2$.

10.10. Se considera un rectángulo de base *a* y altura *b*. Aplicando el concepto de diferencial de una función, calcular aproximadamente cuál es la variación de la diagonal del rectángulo si la base se alarga Δa y la altura se acorta Δb. Comparar esta aproximación con el cálculo del valor exacto. Haced los cálculos en el caso concreto siguiente: a = 15cm, b = 7 cm, $\Delta a = 2\text{mm}$, $\Delta b=-1\text{mm}$.

10.11. Demostrar que el error relativo que se comete en el cálculo del producto de dos factores se puede aproximar por la suma del error relativo cometido en el cálculo de cada uno de los factores.

10.12. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal a las superficies siguientes en el punto que se indica:

a) $z=x^4+3x^2-4xy$, P = (1, 0, 4)

b) $z=2\sin(xy)$, P = (1, π, 0)

c) $z=1+y+\log\left(\dfrac{x}{y}\right)$, P = (1, 1, 2)

10.13. Calcular la derivada de la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+2y^2}$ en el punto (1,2) a lo largo de la curva $r(t)=(t,2t^2)$.

10.14. Calcular las derivadas parciales de segundo y tercer orden de las siguientes funciones reales de dos variables:

a) $f(x,y)=x^4+3x^2-4xy$ b) $f(x,y)=4xy+\dfrac{x}{2y}-\sqrt{x^2+3y^2}$

c) $f(x,y)=\exp\left(-\dfrac{y^2}{2x}\right)$ d) $f(x,y)=\log\left(\dfrac{x+2}{3\sqrt{y}}\right)$

10.15. Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones reales de tres variables:

a) $f(x,y,z)=x^4+3x^2z^2-4xyz$ b) $f(x,y,z)=4xye^z+\dfrac{x}{2y}-\sqrt{x^2z+3y^2}$

c) $f(x,y,z)=\exp\left(-\dfrac{y^2}{2x}\right)+\sin(xz)$ d) $f(x,y,z)=\log\left(\dfrac{x+2z^2}{3z\sqrt{y}}\right)$

10.16. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal a las superficies siguientes en el punto que se indica:

a) $x^2y^2+xz-2y^3-10=0$, $P = (2, 1, 4)$

b) $x^2+y^2+z^2-9=0$, $P = (2, 1, -2)$

10.17. Calcular las derivadas parciales de segundo y tercer orden de las siguientes funciones reales de tres variables:

a) $f(x,y,z)=x^4+3x^2z^2-4xyz$ b) $f(x,y,z)=4xye^z+\dfrac{x}{2y}-\sqrt{x^2z+3y^2}$

c) $f(x,y,z)=\exp\left(-\dfrac{y^2}{2x}\right)+\sin(xz)$ d) $f(x,y,z)=\log\left(\dfrac{x+2z^2}{3z\sqrt{y}}\right)$

10.18. Calcular las derivadas de las funciones siguientes:

a) $\dfrac{dz}{dt}$ si $z=f\left(t\sin(t),e^{2t}\right)$ con f diferenciable

b) $\dfrac{du}{dt}$ si $u=x^2+2y^2$, $x=\sin(2t)$, $y=\exp(2x^2)$

c) D_uz, D_vz si $z=f\left(x,y\right)$ con f diferenciable y $x=2uv$, $y=\dfrac{u}{3v}$

10.19. Demostrar que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función derivable y se considera la función $z=f(x+ay),\ a\in\mathbb{R}$ entonces se cumple la relación

$$D_yz=aD_xz$$

10.20. Demostrar que si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función derivable y se considera la función $z = yf(x^2 - y^2)$ entonces se cumple la relación

$$\frac{1}{x}D_x z + \frac{1}{y}D_y z = \frac{z}{y^2}$$

10.21. Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\begin{cases} x(2y+1), & y\geq 0 \\ x(1-x)-y^2, & y<0 \end{cases}$.

1) Calcular las derivadas parciales de la función en el punto $(0,0)$.

2) Estudiar la diferenciabilidad de la función en el punto $(0,0)$.

3) Calcular la variación de la función en el punto $(0,0)$ a lo largo de la recta de ecuación $2x+y=0$.

4) Se considera la superficie $z=f(x,y)$; calcular la ecuación del plano tangente a esta superficie en el punto $(0,0,0)$ y calcular el ángulo que forma el vector director de este plano con el eje *OX*.