

Tema 9

Exercicis resolts

09.1. Aplicant el teorema del valor mitjà integral i amb l'ajut d'una representació gràfica de la funció, calculeu el valor aproximat de les integrals que s'indiquen:

$$\text{a) } \int_{-1}^1 \frac{1}{100-x^6} dx ; \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{3\cos(x)}{75-x^4} dx ; \quad \text{c) } \int_0^1 \left(2 + \frac{0.1x^2}{\sqrt{1+0.1x^4}} \right) dx$$

09.2. Calculeu la derivada de les funcions següents, precisant el seu camp d'existència:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_2^x \frac{1+2t^2}{t^3} dt & \text{b) } \int_x^3 \frac{1}{1+t^4} dt \\ \text{c) } \int_0^{\cos^2(x)} \exp(-2t^2) dt & \text{d) } \int_2^{e^x} \frac{\log(1+t)}{2t^2} dt \end{array}$$

09.3. Es considera una funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en el seu domini, amb derivada estricta-ment positiva i tal que $f(x)=0$ si i només si $x=0$. Estudieu l'existència d'extrems locals de la funció $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per:

$$F(x) = \int_0^{x^2-6x+8} f(t) dt$$

09.4. Es considera la funció real de variable real definida per:

$$F(x) = \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{\log(1+t)}{1+3t^3} dt$$

- 1) Raoneu que aquesta funció és derivable i calculeu la funció derivada $DF(x)$.
- 2) Raoneu que $DF(x)$ és una funció parell.
- 3) Calculeu la integral de $DF(x)$ en l'interval $[-1,1]$ aplicant el mètode dels trapezis amb un pas $h = 0.2$.

09.5. Calculeu l'àrea dels següents subconjunts del pla:

- a) limitat per la paràbola $3y - x^2 = 0$ i la circumferència $x^2 + y^2 - 5 = 0$.
- b) limitat per les circumferències $x^2 + y^2 - 5 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2\sqrt{5}x = 0$.
- c) limitat per les paràboles $y^2 - 3y + x = 0$ i $y^2 - 3y - x + 3 = 0$.

09.6. Calculeu l'àrea del subconjunt del pla limitat per les corbes planes $y - 2xe^{-x} = 0$ i $y - 2x^2e^{-x} = 0$. Calculeu el volum generat per aquest subconjunt quan es fa girar en torn a l'eix d'abscisses.

09.7. Un sòlid té la forma següent: la seva base és un cercle de radi R i tota secció del sòlid perpendicular a un diàmetre fix de la base és un triangle equilàter. Calculeu el volum d'aquest sòlid.

09.8. Un sòlid està format per una base circular de radi R i tota secció del sòlid perpendicular a un diàmetre fix de la base és un quadrat amb un semicercle a la part superior. Calculeu el volum d'aquest sòlid.

09.9. Calculeu el volum generat per la rotació del subconjunt del pla limitat per la corba $y - 2e^{-|x|} = 0$, les rectes $x - 2 = 0$ i $x + 2 = 0$ i l'eix d'abscisses, quan es fa girar:

- a) en torn de l'eix OX ;
- b) en torn de l'eix OY .

09.10. Un dipòsit té la forma d'un cilindre recte circular de radi R i altura H i està ple d'aigua. Al centre de la base hi ha un forat de secció S que inicialment està tapat. Si es treu el tap, calculeu el temps que tarda en buidar-se el dipòsit. Aplicació al cas: $R = 1\text{m}$, $H = 2\text{m}$, $S = 0.5\text{cm}^2$.

09.11. Calculeu el perfil que ha de tenir un dipòsit de revolució, de tal manera que la velocitat de descens del nivell de líquid sigui constant (rellotge d'aigua).

09.12. Calculeu la longitud de l'arc de paràbola $y = 0.51 + 0.42x + 0.35x^2$ des de $x = 0$ fins a $x = 1$.

09.13. Es consideren els subconjunts del pla:

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}; \quad B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x\}; \quad C = A \cap B$$

- Calculeu la longitud de la frontera de C .
- Calculeu l'àrea del conjunt C .
- Calculeu el volum del cos de revolució que s'obté fent rotar el conjunt C al voltant de l'eix d'ordenades.

09.14. Es considera el següent subconjunt del pla:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq f(x) = \log(x+1)\}$$

- Representeu gràficament aquest subconjunt.
Calculeu analíticament i per un mètode aproximat:
- el volum del sòlid generat per la rotació d'aquest subconjunt al voltant de l'eix OX .
- la longitud de l'arc de corba $y = f(x)$ en l'interval $[0, 1]$.

09.15. Es considera el subconjunt del pla

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, f_2(x) \leq y \leq f_1(x)\}$$

on $f_2(x) = e^x - 1$ i $f_1(x)$ és la recta que passa pels punts $P(0, e)$ i $Q(1, f_2(1))$.

Es demana:

- Representeu gràficament aquest subconjunt i calculeu la seva àrea.
- Calculeu el volum generat per la rotació d'aquest subconjunt al voltant de l'eix d'ordenades.

09.16. Calculeu el volum del cos generat per la rotació al voltant de l'eix d'ordenades del subconjunt del pla limitat per les corbes planes $x^2 + y^2 - 9 = 0$ i $x^2 + y^2 - 6x = 0$. Feu una representació gràfica.

09.17. Es consideren les corbes planes $C1: x^2 = 4y$ i $C2: y = \frac{1}{x^2 + 3}$.

- 1) Representeu esquemàticament el recinte limitat per aquestes dues corbes.
- 2) Calculeu l'àrea del recinte limitat per les corbes $C1$ i $C2$.
- 3) Calculeu el volum del cos generat per rotació del recinte limitat per les corbes $C1$ i $C2$ en torn a l'eix OY .

09.18. Es considera $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{\sqrt{x-1}} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 2 + 5(x-2)^2 e^{2-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- a) Feu una representació gràfica de la funció.
- b) Estudieu si és finita l'àrea limitada per la gràfica de la funció i l'eix d'abscisses en l'interval $]-\infty, 2]$; en cas afirmatiu, calculeu-la.
- c) Calculeu l'àrea limitada per la gràfica de la funció en l'interval $[2, 10]$.

09.19. Estudieu la convergència de les integrals impròpies següents i calculeu-les quan sigui possible:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx & \text{b)} \int_1^4 \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ \text{c)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} dx & \text{d)} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx \end{array}$$

09.20. Es considera el conjunt $A = \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{x}, x \geq 1 \right\}$. Calculeu l'àrea i el volum de la figura generada quan es fa rotar el conjunt en torn de l'eix d'abscisses.