

Tema 8

Càlcul diferencial de funcions reals de variable real (2)

Objectius

1. Càlcul dels extrems locals d'una funció amb wxMaxima.
2. Càlcul dels extrems absoluts d'una funció en un conjunt.
3. Conèixer i interpretar els teoremes del valor mitjà.
4. Aplicar les regles de l'Hôpital.
5. Calcular el desenvolupament de Taylor d'una funció derivable.
6. Calcular el desenvolupament en sèrie de potències d'una funció.
7. Aplicació pràctica de les propietats de les funcions derivables.

Continguts

- 08-1. Extrems locals d'una funció. Extrems absoluts.
- 08-2. Teoremes del valor mitjà.
- 08-3. La regla de l'Hôpital.
- 08-4. La fórmula de Taylor. Sèries de potències.
- 08-5. Aplicacions de la derivada. Optimització.

Referències

- AEM11 ALANINOS PRATS, J; EXTREMERA LIZANA, J; MUÑOZ RIVAS, P. (2011)
Cálculo con wxMaxima.
- APJ11 ALANINOS PRATS, J; APARICIO DEL PRADO, C; EXTREMERA LIZANA, J; MUÑOZ RIVAS, P.; VILLENA MUÑOZ, A.R. (2011)
Prácticas de ordenador con wxMaxima.
- AP86 APOSTOL, T.M. (1986)
Análisis Matemático

- BR09 BRUZÓN GALLEGO, M. DE LOS SANTOS; RAMÍREZ LABRADOR, JOSÉ (2009)
Modelos matemáticos con Maxima
- BU07 DE BURGOS, JUAN (2007)
Cálculo Infinitesimal de una variable (segunda edición).
- ES08 ESTELA CARBONELL, M. ROSA; SAÀ SEOANE, JOEL (2008)
Cálculo con soporte interactivo en moodle.
- ES02 ESTEP, DONALD (2002)
Practical Analysis in one variable
- GV07a GONZÁLEZ VEGA, LAUREANO (2007)
Laboratorio de Matemáticas. Vol. 1: números y ecuaciones
- GV07b GONZÁLEZ VEGA, LAUREANO (2007)
Laboratorio de Matemáticas. Vol. 2: límites y derivadas
- JB01 JARAUTA BRAGULAT, EUSEBI (2001)
Anàlisi Matemàtica d'una variable. Fonaments i aplicacions.
- RR05 REDONDO NEBLE, M. VICTORIA; RODRÍGUEZ GALVÁN, J. RAFAEL (2005)
Introducción a Maxima
- RR08b RODRÍGUEZ RIOTORTO, MARIO (2008)
Curso intensivo i-MATH de software libre orientado a Ciencias e Ingeniería
- RU80 RUDIN, WALTER (1980)
Principios de Análisis Matemático.
- SP95 SPIVAK, MICHAEL (1995)
Calculus (Càlcul Infinitesimal).
- VR09 VALLEJO RODRÍGUEZ, JOSÉ ANTONIO (2009)
Cálculo diferencial con Maxima

08-1.- Extrems locals d'una funció. Extrems absoluts

Els continguts d'aquest apartat es desenvolupen al fitxer **Tema_08-1.wxm**.

Definició (extrems locals o relatius).

Considerem una funció real de variable real $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; aleshores:

- es diu que f té un *màxim local* (o màxim relatiu) en el punt $x_0 \in [a, b]$, si existeix $r > 0$ tal que

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in B(x_0; r) \cap [a, b]$$

- es diu que f té un *mínim local* (o mínim relatiu) en el punt $x_0 \in [a, b]$, si existeix $r > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x_0; r) \cap [a, b]$$

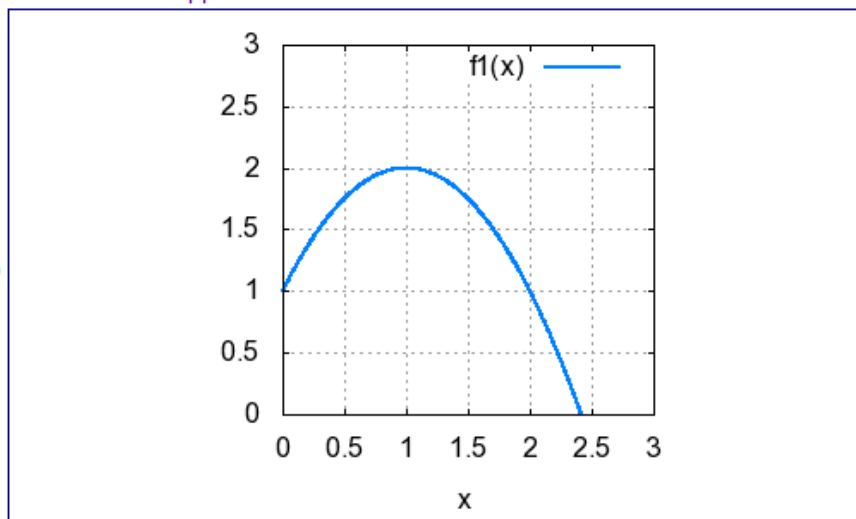
Els màxims i mínims locals s'anomenen *extrems locals o relatius*. La interpretació gràfica d'aquesta definició es pot veure a continuació.

Màxim local d'una funció derivable:

```
(%i1) f1(x):=2 - (x - 1)^2$  
wxplot2d([f1(x)], [x,0,3], [y, 0, 3], [ylabel, ""], [style, [lines, 2]], [legend, "f1(x)],  
[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 200])$
```

plot2d: some values were clipped.

(%t2)

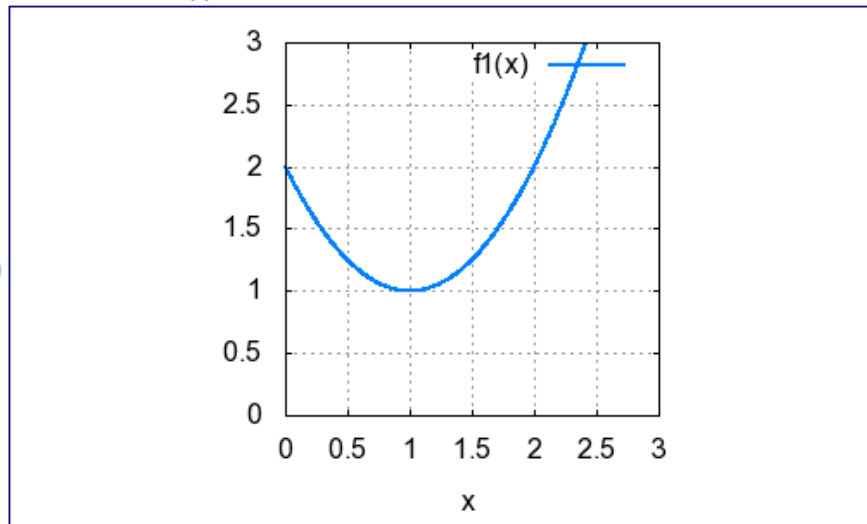


Mínim local d'una funció derivable:

```
(%i3) f2(x):=x^2-2*x+2$
wxplot2d([f2(x)], [x,0,3], [y, 0,3], [ylabel, ""], [style, [lines, 2]], [legend, "f1(x)"],
[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 200] )$
```

plot2d: some values were clipped.

(%t4)

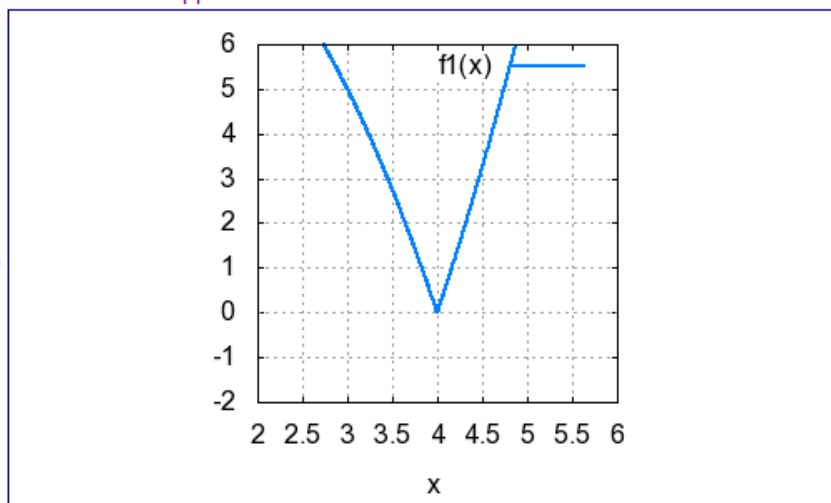


Mínim local d'una funció no derivable:

```
(%i5) f3(x):=abs(x^2-2*x-8)$
wxplot2d([f3(x)], [x, 2, 6], [y, -2, 6], [ylabel, ""], [style, [lines, 2]], [legend, "f1(x)"],
[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 200] )$
```

plot2d: some values were clipped.

(%t6)



Proposició. Si una funció f té un extrem local en un punt x_0 i és derivable en aquest punt, aleshores es compleix $Df(x_0) = 0$.

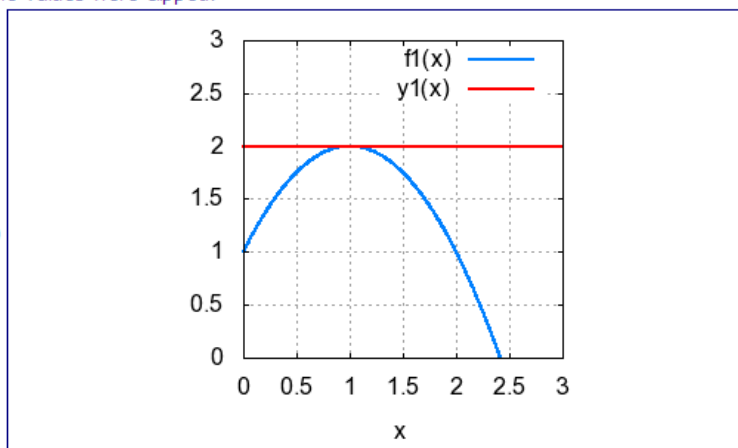
Aquest resultat significa que la recta tangent a la gràfica de la funció és horitzontal, tal com es mostra a continuació.

Màxim local d'una funció derivable:

```
(%i7) f1(x):=2 - (x - 1)^2$      y1(x):=2$
      wxplot2d([f1(x), y1(x)], [x,0,3], [y, 0,3], [ylabel, ""], [style, [lines, 2]], [legend, "f1(x)", "y1(x)"],
      [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 200] )$
```

plot2d: some values were clipped.

(%t9)

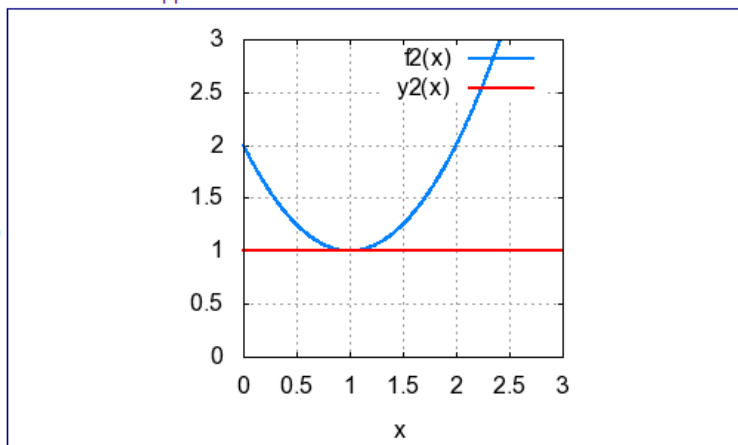


Mínim local d'una funció derivable:

```
(%i10) f2(x):=x^2-2*x+2$      y2(x):=1$
      wxplot2d([f2(x), y2(x)], [x,0,3], [y, 0,3], [ylabel, ""], [style, [lines, 2]], [legend, "f2(x)", "y2(x)"],
      [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 200] )$
```

plot2d: some values were clipped.

(%t12)

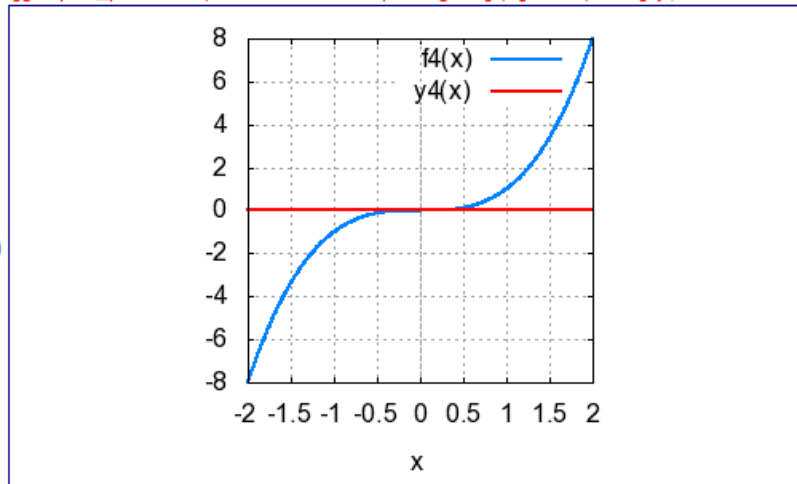


Els punts en els quals es compleix la propietat $Df(x) = 0$ s'anomenen *punts crítics* de la funció. La proposició anterior diu que tot extrem local és un punt crític. El recíproc no és cert, com il·lustra per exemple la funció $f(x) = x^3$, que compleix $Df(0) = 0$ i no obstant això no presenta un extrem local en aquest punt.

Punt crític d'una funció derivable en el qual no hi ha extrem local:

```
(%i13) f4(x):=x^3$      y4(x):=0$
wxplot2d([f4(x), y4(x)], [x,-2,2], [ylabel, ""], [style, [lines, 2]], [legend, "f4(x)", "y4(x)"],
[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 200])$
```

(%t15)



Estudi dels extrems locals d'una funció.

Considerem una funció $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Per determinar els extrems locals de la funció, cal estudiar:

- (1) El domini o camp d'existència de la funció, el camp de continuïtat i el camp de derivabilitat.
- (2) Els punts crítics de la funció.
- (3) Els punts en els quals la funció no és derivable.
- (4) El signe de la funció derivada en un entorn dels punts crítics i dels punts en els quals la funció no és derivable.

Per exemple, en el cas de la funció definida per $f(x) = 2 - (x-1)^2$, el seu camp d'existència, de continuïtat i de derivabilitat és la recta real. La funció derivada és $Df(x) = -2(x-1)$. Determinem els punts crítics de la funció:

```
(%i1) f1(x):=2 - (x - 1)^2;
(%o1) f1(x):=2-(x-1)^2
(%i2) define (Df1(x) , diff(f1(x), x) );
(%o2) Df1(x):=-2(x-1)
(%i3) Eq1: Df1(x) = 0; solve(Eq1, x);
(%o3) -2(x-1)=0
(%o4) [x=1]
```

Per tant, l'únic punt crític és $x_0 = 1$. A continuació, estudiem el signe de la funció derivada en un entorn d'aquest punt. Comencem per la dreta del punt:

```
(%i5) assume(x > 0, x < 1);
(%o5) [x > 0, x < 1]
(%i6) is(Df1(x) > 0);
      is(Df1(x) < 0);
(%o6) true
(%o7) false
```

Ara l'esquerra del punt crític:

```
(%i8) forget(x > 0, x < 1)$
      assume(x > 1, x < 2);
(%o9) [x > 1, x < 2]
(%i10) is(Df1(x) > 0);
       is(Df1(x) < 0);
(%o10) false
(%o11) true
```

Així doncs, la derivada a l'esquerra del punt crític és positiva i a la dreta és negativa; per tant, el punt crític és un màxim local de la funció. Si la situació fos la contrària, aleshores es tractaria d'un mínim local de la funció.

En el cas de la funció definida per $f(x) = x^3$, el seu camp d'existència, de continuïtat i de derivabilitat és la recta real. La funció derivada és $Df(x) = 3x^2$. Determinem els punts crítics de la funció:

```
(%i1) f4(x):=x^3;
(%o1) f4(x):=x^3
(%i2) define (Df4(x), diff(f4(x), x));
(%o2) Df4(x):=3 x^2
(%i3) Eq2: Df4(x) = 0; solve(Eq2, x);
(%o3) 3 x^2 = 0
(%o4) [x = 0]
```

Per tant, l'únic punt crític és $x_0 = 0$. Estudiem ara el signe de la funció derivada en un entorn d'aquest punt:

```
(%i5) assume(x > -1, x < 0);
(%o5) [x > -1, x < 0]
(%i6) is(Df4(x) > 0); is(Df4(x) < 0);
(%o6) true
(%o7) false
```

```

(%i8) forget(x > -1, x < 0)$
      assume(x > 0, x < 1);
(%o9) [x > 0, x < 1]
(%i10) is(Df4(x) > 0);    is(Df4(x) < 0);
(%o10) true
(%o11) false

```

Per tant, la derivada a l'esquerra del punt crític és positiva i a la dreta també és positiva i el punt crític no és un extrem local de la funció.

En el cas de la funció definida per $f(x) = |x^2 - 2x - 8|$, la funció no és derivable en el punt $x_1 = 4$. La funció derivada és $Df(x) = (2x - 2) \frac{x^2 - 2x - 8}{|x^2 - 2x - 8|}$, $x \neq -2$, $x \neq 4$.

Analitzem el canvi de signe de la derivada en l'entorn del punt $x_1 = 4$:

```

(%i1) f3(x):=abs(x^2-2*x-8);
(%o1) f3(x):=|x^2-2 x-8|
(%i2) define (Df3(x) , diff(f3(x), x) );
(%o2) Df3(x):= (2 x-2) (x^2-2 x-8)
               |x^2-2 x-8|
(%i3) assume(x > 3, x < 4);
(%o3) [x > 3, x < 4]
(%i4) is(Df3(x) > 0);    is(Df3(x) < 0);
(%o4) false
(%o5) true
(%i6) forget(x > 3, x < 4)$    assume(x > 4, x < 5);
(%o7) [x > 4, x < 5]
(%i8) is(Df3(x) > 0);    is(Df3(x) < 0);
(%o8) true
(%o9) false

```

Per tant, la derivada a l'esquerra del punt crític és negativa i a la dreta és positiva i el punt crític és un extrem local (mínim).

Definició (extrems absoluts).

Considerem una funció real de variable real $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; aleshores:

- es diu que f té el *màxim absolut* en el punt $x_M \in [a, b]$, si es compleix

$$f(x_M) \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

- es diu que f té el *mínim absolut* en el punt $x_m \in [a, b]$, si es compleix

$$f(x_m) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

L'existència d'extrems absoluts d'una funció en un interval tancat es determina per aplicació del teorema de Weierstrass, el qual afirma que la continuïtat de la funció en un interval tancat garanteix l'existència d'extrems absoluts de la funció en aquest interval. Naturalment, hi pot haver extrems absoluts sense aquestes hipòtesis.

Per tant, l'estudi dels extrems (locals i absoluts) d'una funció $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en un interval s'ha de fer aplicant la metodologia següent:

- (1) El domini de la funció, el camp de continuïtat i el camp de derivabilitat.
- (2) Els punts crítics de la funció.
- (3) Els punts en què la funció no és derivable.
- (4) Determinar el valor de la funció en els extrems a, b de l'interval.

Considerem per exemple la funció $f : [-6, 8] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}, \quad -6 \leq x \leq 8$$

Per aplicació dels criteris de continuïtat, aquesta funció és contínua en l'interval considerat i, per tant, té extrems absoluts en aquest interval. Per estudiar els extrems, determinem la funció derivada, els punts crítics i els punts en els quals la funció no és derivable:

```
(%i1) f5(x):=(x^2*(6-x))^(1/3);
(%o1) f5(x):=(x^2(6-x))^(1/3)
(%i2) diff(f5(x), x);
(%o2)  $\frac{2(6-x)^{1/3}}{3x^{1/3}} - \frac{x^{2/3}}{3(6-x)^{2/3}}$ 
(%i3) ratsimp(%);
(%o3)  $-\frac{x-4}{(6-x)^{2/3}x^{1/3}}$ 
(%i4) define (Df5(x), %);
(%o4) Df5(x):= $-\frac{x-4}{(6-x)^{2/3}x^{1/3}}$ 
```

Per tant, la funció derivada és

$$Df(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \quad -6 < x < 8, \quad x \neq 0, \quad x \neq 6$$

Calculem ara els punts crítics de la funció:

```
(%i5) Eq3a: Df5(x) = 0; solve(Eq3a, x);
(%o5) 
$$\frac{x-4}{(6-x)^{2/3} x^{1/3}} = 0$$

(%o6) [x = 4]
```

L'únic punt crític de la funció és $x_1 = 4$ ja que la derivada s'anul·la en aquest punt; la funció no és derivable en els punts $x_2 = 0$ i $x_3 = 6$. Ara cal estudiar el signe de la funció derivada en un entorn de cada un d'aquests punts. Anem de menor a major i comencem estudiant el punt $x_2 = 0$:

```
(%i7) assume(x>-1, x<0);
      is(Df5(x) > 0); is(Df5(x) < 0);
(%o7) [x > -1, x < 0]
(%o8) false
(%o9) true
(%i10) forget(x>-1, x<0)$ assume(x>0, x<1);
      is(Df5(x) > 0); is(Df5(x) < 0);
(%o11) [x > 0, x < 1]
(%o12) true
(%o13) false
```

Per tant, la funció té un mínim local en aquest punt.

Vegem ara el punt $x_1 = 4$:

```
(%i14) forget(x>0, x<1)$ assume(x>3, x<4);
      is(Df5(x) > 0); is(Df5(x) < 0);
(%o15) [x > 3, x < 4]
(%o16) true
(%o17) false
(%i18) forget(x>3, x<4)$ assume(x>4, x<5);
      is(Df5(x) > 0); is(Df5(x) < 0);
(%o19) [x > 4, x < 5]
(%o20) false
(%o21) true
```

Per tant, la funció té un màxim local en aquest punt.

En el punt $x_3 = 6$ es compleix:

```
(%i22) forget(x>4, x<5)$ assume(x>5, x<6);
      is(Df5(x) > 0); is(Df5(x) < 0);
(%o23) [x > 5, x < 6]
(%o24) false
(%o25) true
(%i26) forget(x>5, x<6)$ assume(x>6, x<7);
      is(Df5(x) > 0); is(Df5(x) < 0);
(%o27) [x > 6, x < 7]
(%o28) false
(%o29) true
```

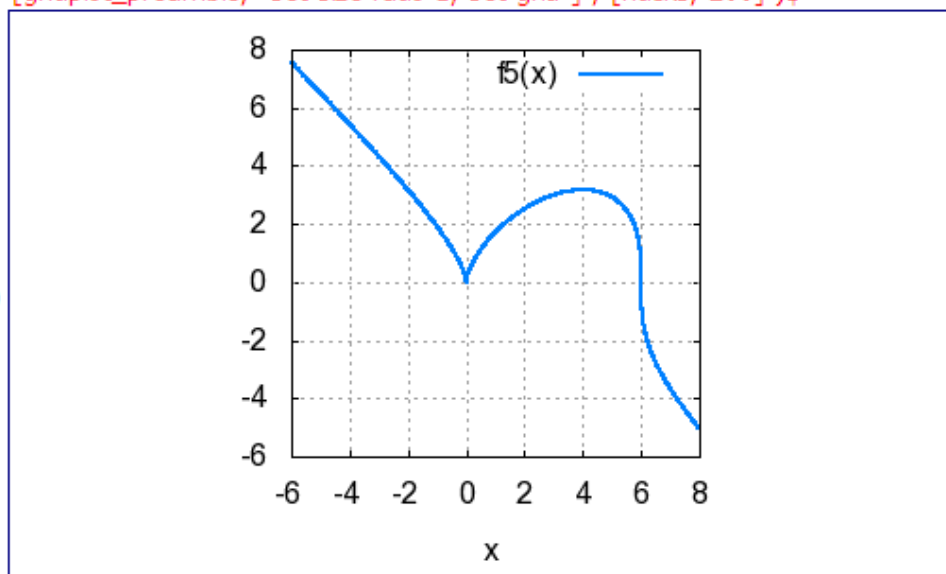
Per tant, la funció no té extrem local en aquest punt. Per determinar els extrems absoluts cal elaborar una llista amb els extrems locals i els extrems de l'interval i calcular el menor i el major de tots ells:

```
(%i30) a=a:-6$ b=b:8$ x1=x1:4$ x2=x2:0$
      [a, x1, x2, b]; [f5(a), f5(x1), f5(x2), f5(b)];
      max(f5(a), f5(x1), f5(x2), f5(b));
      min(f5(a), f5(x1), f5(x2), f5(b));
(%o34) [-6, 4, 0, 8]
(%o35) [3 24/3, 2 41/3, 0, -27/3]
(%o36) 3 24/3
(%o37) -27/3
```

Per tant el màxim absolut és al punt $a = -6$ i el mínim absolut al punt $b = 8$. Vegem la representació gràfica de la funció:

```
(%i38) wxplot2d([f5(x)], [x,-6,8], [ylabel, ""], [style, [lines, 2]], [legend, "f5(x)"],
      [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 200])$
```

(%t38)



08-2.- Teoremes del valor mitjà

Els continguts d'aquest apartat es desenvolupen al fitxer **Tema_08-2.wxm**. En aquest apartat es comenten i s'il·lustren dos teoremes importants relacionats amb la derivada d'una funció.

Teorema de Rolle. Considerem una funció $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que és contínua en l'interval $[a,b]$ i derivable en l'interval $]a,b[$. Si es compleix la condició d'igualtat de valors de la funció en els extrems de l'interval, és a dir $f(a) = f(b)$, aleshores la funció té almenys un punt crític en l'interval $]a,b[$.

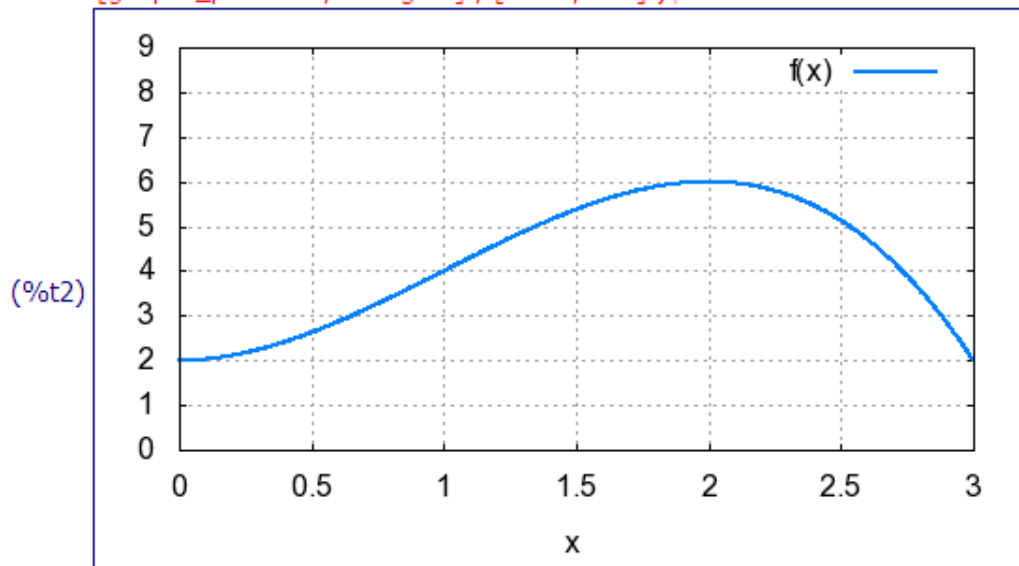
Considerem per exemple la funció definida per:

$$f(x) = 6 - (x+1)(x-2)^2, \quad 0 \leq x \leq 3$$

```
(%i1) f(x):=6-(x+1)*(x-2)^2;  
(%o1) f(x):=6-(x+1)(x-2)^2
```

Representació gràfica de la funció:

```
(%i2) wxplot2d([f(x)], [x,0,3], [y,0,9], [ylabel, ""], [legend, "f(x)"], [style, [lines, 2]],  
[gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 200])$
```



La derivada d'aquesta funció és:

$$f'(x) = -2(x+1)(x-2) - (x-2)^2, \quad 0 < x < 3$$

Es compleix $f(0) = f(3) = 0$. Per tant la funció té un punt crític a l'interior de l'interval, que és el punt $x_0 = 2$. En efecte:

```
(%i3) define (Df(x) , diff(f(x), x) );
(%o3) Df(x):=-2 (x-2)(x+1)-(x-2)^2
(%i4) Eq1: Df(x) = 0;      solve(Eq1, x);
(%o4) -2 (x-2)(x+1)-(x-2)^2 = 0
(%o5) [x = 0, x = 2]
```

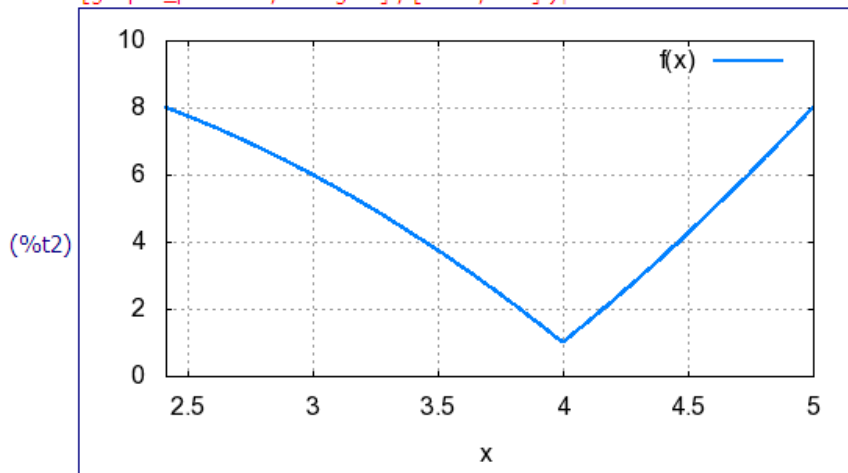
Si la funció $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ no és derivable en l'interval obert $]a,b[$, aleshores pot no existir cap punt en el qual es compleixi el teorema. En efecte, considerem per exemple la funció definida per:

$$f(x) = 1 + |x^2 - 2x - 8|, \quad 1 + \sqrt{2} \leq x \leq 5$$

Definició i gràfica de la funció:

```
(%i1) f(x):=1+abs(x^2 - 2*x - 8);
(%o1) f(x):=1+|x^2-2 x-8|

(%i2) wxplot2d([f(x)], [x,1+sqrt(2), 5], [y,0,10], [ylabel, ""], [legend, "f(x)"], [style, [lines, 2]],
[gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 200])$
```



Es compleix la condició d'igualtat de valors als extrems de l'interval, però la funció no és derivable en l'interval obert, ja que la funció derivada és:

$$f(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x-8)}{|x^2-2x-8|}, \quad 1 + \sqrt{2} < x < 5, \quad x \neq 4$$

En efecte, vegem les comprovacions corresponents:

```

(%i3) f(1+sqrt(2)), numer;    f(5), numer;
(%o3) 8.0
(%o4) 8
(%i5) define (Df(x) , diff(f(x), x) );
(%o5) Df(x):=
$$\frac{(2x-2)(x^2-2x-8)}{|x^2-2x-8|}$$

(%i6) solve(Df(x)=0, x);
(%o6) [x = -2, x = 4, x = 1]
(%i7) assume(x>1+sqrt(2), x<4)$
      is(Df(x) < 0);
(%o8) true
(%i9) forget(x>1+sqrt(2), x<4)$
      assume(x>4, x<6)$    is(Df(x) > 0);
(%o11) true

```

Teorema del valor mitjà de Lagrange (o fórmula de l'increment finit).

Considerem una funció $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que és contínua en l'interval $[a,b]$ i derivable en l'interval $]a,b[$. Aleshores, existeix almenys un punt $x_0 \in]a,b[$ tal que:

$$f(b) - f(a) = (b - a)Df(x_0)$$

Interpretació geomètrica: la recta tangent a la gràfica de la funció en el punt $(x_0, f(x_0))$ és paral·lela a la corda que uneix els punts $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Vegem-ne un exemple. Considerem la funció definida per

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3), \quad 0 \leq x \leq 5$$

La recta que uneix els punts $(0, f(0))$ i $(5, f(5))$ té per equació:

$$y - f(0) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}(x - 0) \Leftrightarrow y = 6x - 6$$

Vegem el detall dels càlculs i la representació gràfica conjunta de la funció i d'aquesta recta:

```

(%i1) f(x):=(x-1)*(x-2)*(x-3);
(%o1) f(x):=(x-1)(x-2)(x-3)

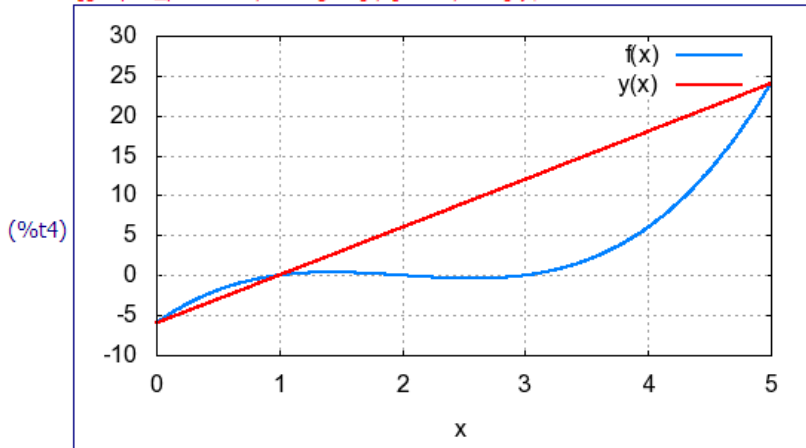
```

```

(%i2) y - f(0) = (f(5)-f(0)) / (5-0) *(x-0);
(%o2) y + 6 = 6 x
(%i3) define (y(x), 6*x - 6);
(%o3) y(x) := 6 x - 6

(%i4) wxplot2d([f(x),y(x)], [x,0,5], [y,-10, 30], [ylabel, ""], [legend, "f(x)", "y(x)"], [style, [lines, 2]],
[gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 200])$

```



Ara calculem els punts en els quals la derivada és igual al pendent de la corda:

```

(%i5) define ( Df(x) , diff(f(x),x) );
(%o5) Df(x):=(x-2)(x-1)+(x-3)(x-1)+(x-3)(x-2)
(%i7) Eq1: Df(x) = 6; solve([Eq1], [x]), numer;
(%o7) (x-2)(x-1)+(x-3)(x-1)+(x-3)(x-2)=6
rat: replaced 9.16515 by 6049/660 = 9.16515
rat: replaced 9.16515 by 6049/660 = 9.16515
(%o8) [ x = 0.4725, x = 3.52753 ]

```

Finalment calculem l'equació de la recta tangent en aquests punts i fem la representació gràfica d'aquestes rectes i la corba anterior:

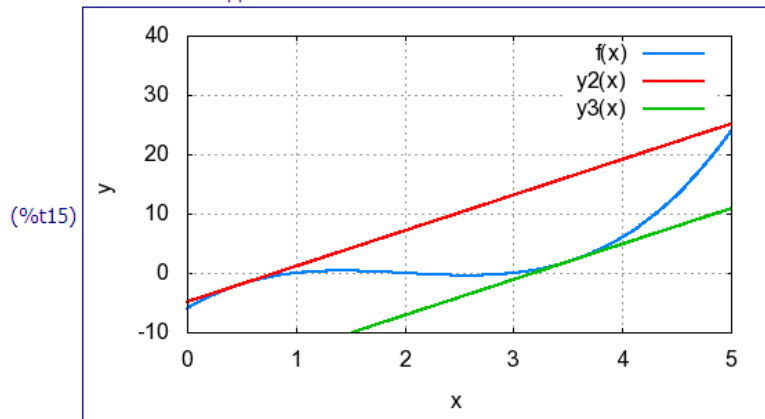
```

(%i9) x1 = x1:0.4725;
      x2 = x2:3.52753;
(%o9) x1 = 0.4725
(%o10) x2 = 3.52753
(%i11) 'f(x1) = f(x1), numer;
       'f(x2) = f(x2), numer;
(%o11) f(0.4725) = -2.03655
(%o12) f(3.52753) = 2.03673

```

```
(%i13) y2(x):=6*(x - x1) + f(x1);
      y3(x):=6*(x - x2) + f(x2);
(%o13) y2(x):= 6 (x-x1)+f(x1)
      (%o14) y3(x):= 6 (x-x2)+f(x2)

(%i15) wxplot2d([f(x), y2(x), y3(x)], [x,0,5], [y,-10, 40], [legend, "f(x)", "y2(x)", "y3(x)"], [style, [lines, 2]],
      [gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 200])$
plot2d: some values were clipped.
```



El teorema del valor mitjà permet la caracterització de la monotonia d'una funció derivable en un interval. En efecte, si una funció $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal és contínua en l'interval $[a,b]$ i derivable en l'interval $]a,b[$ aleshores, es verifica:

- Si en un interval $I=[c,d] \subset [a,b]$ es compleix $Df(x) \geq 0, \forall x \in I$, la funció és monòtona creixent en I .
- Si en un interval $I=[c,d] \subset [a,b]$ es compleix $Df(x) \leq 0, \forall x \in I$, la funció és monòtona decreixent en I .
- Si en un interval $I=[c,d] \subset [a,b]$ es compleix $Df(x) = 0, \forall x \in I$, la funció és constant en I .

Així mateix, el teorema permet la caracterització dels extrems locals d'una funció derivable en un interval. En efecte, si una funció $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, tal és contínua en l'interval $[a,b]$ i derivable en l'interval $]a,b[$ i suposem que $x_0 \in]a,b[$ és un punt crític de la funció, és a dir, tal que $Df(x_0) = 0$, aleshores, es verifica:

- Si existeix $r > 0$ tal que

$$Df(x) > 0, \forall x \in]x_0 - r, x_0[\quad \text{i} \quad Df(x) < 0, \forall x \in]x_0, x_0 + r[$$

aleshores la funció té un màxim local en el punt x_0 .

- Si existeix $r > 0$ tal que

$$Df(x) < 0, \forall x \in]x_0 - r, x_0[\quad \text{ i } \quad Df(x) > 0, \forall x \in]x_0, x_0 + r[$$

aleshores la funció té un mínim local en el punt x_0 .

Observi's que aquesta ha estat la metodologia aplicada per caracteritzar els extrems en l'apartat anterior.

08-3.- La regla de l'Hôpital

Els continguts d'aquest apartat es desenvolupen al fitxer **Tema_08-3.wxm**.

Si es tracta de calcular el límit d'un quocient $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ i es compleix que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, aleshores es verifica:

- Si $L_2 \neq 0$ i $L_2 \neq \infty$ aleshores $L = \frac{L_1}{L_2}$
- Si $L_2 = \infty$ i $L_1 \in \mathbb{R}$ aleshores $L = 0$
- Si $L_2 = 0$ i $L_1 \neq 0$, aleshores $L = \pm\infty$ depenent del signe de L_1
- Si els dos límits són zero o infinit (del mateix signe), hi ha una indeterminació.

Si les funcions són derivables, es pot aplicar el següent resultat.

Regla de l'Hôpital (indeterminacions del tipus 0/0)

Considerem dues funcions $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Suposem que les dues funcions són contínues en $[a, b]$ derivables en $]a, b[$ i que en un punt x_0 d'aquest interval es compleix $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ i es vol estudiar l'existència del límit $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Aleshores, si la funció derivada Dg no s'anul·la en un entorn del punt x_0 i existeix

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L$ (que pot ser finit o infinit), aleshores es verifica que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Exemple. Es tracta de calcular el límit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x - x^2}$.

Definim les funcions, verifiquem que es tracta d'una forma indeterminada i calculem les funcions derivades:

```
(%i1) f1(x):=sin(2*x);      f2(x):=3*x-x^2;  
(%o1) f1(x):=sin(2 x)  
(%o2) f2(x):=3 x - x^2
```

```
(%i3) 'limit(f1(x), x, 0) = limit(f1(x), x, 0);
      'limit(f2(x), x, 0) = limit(f2(x), x, 0);
(%o3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) = 0$ 

(%o4)  $\lim_{x \rightarrow 0} 3x - x^2 = 0$ 

(%i5) define ( Df1(x) , diff(f1(x),x) );
      define ( Df2(x) , diff(f2(x),x) );
(%o5) Df1(x):= 2 cos(2 x)
(%o6) Df2(x):= 3 - 2 x
```

Verifiquem que la derivada del denominador no s'anul·la en un entorn de l'origen i, per tant, es pot aplicar la regla de L'Hôpital, obtenint-se:

```
(%i7) 'limit(Df1(x)/Df2(x), x, 0) = limit(Df1(x)/Df2(x), x, 0);
(%o7)  $2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x)}{3 - 2x} \right) = \frac{2}{3}$ 
```

Els algoritmes interns de càlcul de límits de wxMaxima tenen incorporada la metodologia adient, de manera que es pot calcular el límit directament:

```
(%i8) 'limit(f1(x)/f2(x), x, 0)=limit(f1(x)/f2(x), x, 0);
(%o8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x - x^2} = \frac{2}{3}$ 
```

Com és sabut, en algunes ocasions cal aplicar més d'una vegada la metodologia anterior per arribar a un resultat. Per exemple, per calcular el límit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{e^x + e^{-x} - 2}$ procedim a aplicar la metodologia:

```
(%i1) f1(x):=1-cos(x);      f2(x):=exp(x)+exp(-x)-2;
(%o1) f1(x):= 1 - cos(x)
(%o2) f2(x):= exp(x) + exp(-x) - 2
(%i3) 'limit(f1(x), x, 0) = limit(f1(x), x, 0);
      'limit(f2(x), x, 0) = limit(f2(x), x, 0);
(%o3)  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \cos(x) = 0$ 

(%o4)  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x + e^{-x} - 2 = 0$ 
```

```

(%i5) define ( Df1(x) , diff(f1(x),x) );
      define ( Df2(x) , diff(f2(x),x) );
(%o5) Df1(x):= sin(x)
      (%o6) Df2(x):= %ex - %e-x
(%i7) 'limit(Df1(x), x, 0) = limit(Df1(x), x, 0);
      'limit(Df1(x), x, 0) = limit(Df2(x), x, 0);
(%o7)  lim sin(x)=0
      x->0
      (%o8)  lim sin(x)=0
      x->0

```

Per tant el límit del quocient de derivades es també una forma indeterminada. Ara calculem les derivades de segon ordre de les funcions:

```

(%i9) define ( D2f1(x) , diff(f1(x),x,2) );
      define ( D2f2(x) , diff(f2(x),x,2) );
(%o9) D2f1(x):= cos(x)
      (%o10) D2f2(x):= %ex + %e-x

```

I calculem els límits d'aquestes funcions a l'origen:

```

(%i11) 'limit(D2f1(x), x, 0) = limit(D2f1(x), x, 0);
      'limit(D2f2(x), x, 0) = limit(D2f2(x), x, 0);
(%o11)  lim cos(x)=1
      x->0
      (%o12)  lim %ex + %e-x = 2
      x->0

```

Per tant, podem afirmar que es compleix:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D^2(1 - \cos(x))}{D^2(e^x + e^{-x} - 2)} = \frac{1}{2}$$

En efecte:

```

(%i13) 'limit(D2f1(x)/D2f2(x), x, 0) = limit(D2f1(x)/D2f2(x), x, 0);
(%o13)  lim cos(x) / (%ex + %e-x) = 1/2
      x->0

```

Per tant, es pot afirmar que es compleix:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(1 - \cos(x))}{D(e^x + e^{-x} - 2)} = \frac{1}{2}$$

I finalment que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{e^x + e^{-x} - 2} = \frac{1}{2}$$

En efecte, el resultat és el que dóna wxMaxima:

```
(%i14) 'limit(f1(x)/f2(x), x, 0) = limit(f1(x)/f2(x), x, 0);
(%o14) lim_{x -> 0} (1 - cos(x))/(e^x + e^-x - 2) = 1/2
```

No sempre es pot aplicar la regla de L'Hôpital per arribar a un resultat encara que sigui amb unes quantes iteracions, ni wxMaxima dóna un resultat satisfactori de forma directa. Cal recordar que si en una forma indeterminada s'aplica la Regla de L'Hôpital amb el resultat que el límit del quocient de derivades no existeix, aleshores no s'ha de concloure que el límit inicial no existeix. Així, per exemple, plantegem el càlcul del límit:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x - 1}$$

Definim les funcions amb wxMaxima i plantegem el càlcul del límit:

```
(%i1) f1(x):=x^2*sin(1/x); f2(x):=exp(x)-1;
(%o1) f1(x):=x^2 sin(1/x)
(%o2) f2(x):=exp(x)-1
(%i3) 'limit(f1(x)/f2(x), x, 0) = limit(f1(x)/f2(x), x, 0);
(%o3) lim_{x -> 0} (sin(1/x) x^2)/(e^x - 1) = ind
```

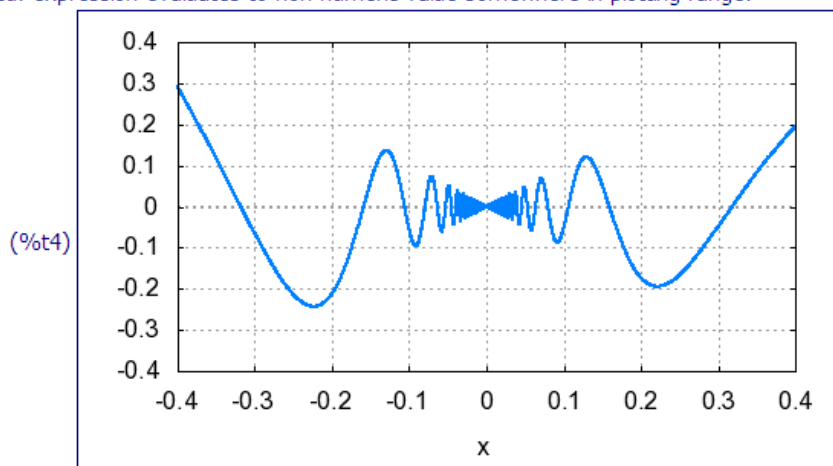
La resposta de wxMaxima “ind” significa que el programa no pot calcular-lo. Si es calculen les derivades successives i s'aplica la regla de L'Hôpital, es va obtenint una forma indeterminada en la qual algun dels límits no existeix. Com sabem, això no significa la no existència del límit. En efecte, en aquest cas apliquem l'equivalència de les funcions $f_1(x) = e^x - 1$ i $f_2(x) = x$ a l'origen, amb la qual cosa el límit inicial es pot plantejar:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0$$

ja que és el producte d'un infinitèsim per una funció fitada.

La representació gràfica de la funció il·lustra aquest fet.

```
(%i4) wxplot2d([f1(x)/f2(x)], [x,-0.4,0.4], [y, -0.4, 0.4], [ylabel, ""], [legend, ""], [style, [lines, 2]],
[gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 300])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
```



Regla de l'Hôpital (indeterminacions del tipus ∞/∞)

Considerem dues funcions $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supposem que les dues funcions són contínues en $[a, b]$ derivables en $]a, b[$ i que en un punt x_0 d'aquest interval es compleix $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ i es vol estudiar l'existència del límit $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Aleshores, si la funció derivada Dg no s'anul·la en un entorn del punt x_0 i existeix

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = L$ (que pot ser finit o infinit), aleshores es verifica que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

La metodologia s'aplica de manera idèntica a la indeterminació anterior. Així, per exemple, si es tracta de calcular el límit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{x^3 + 2x^2 + 4x + 3}$$

observem en primer lloc que es tracta d'una indeterminació d'aquest tipus:

```
(%i1) f1(x):=log(x^2 + 1);
      f2(x):=x^3 + 2*x^2 + 4*x + 3;

(%o1) f1(x):=log(x^2 + 1)
      (%o2) f2(x):=x^3 + 2 x^2 + 4 x + 3

(%i3) 'limit(f1(x), x, inf)=limit(f1(x), x, inf);
      'limit(f2(x), x, inf)=limit(f2(x), x, inf);

(%o3)  lim log(x^2 + 1)=∞
      x->∞

(%o4)  lim x^3 + 2 x^2 + 4 x + 3 = ∞
      x->∞
```

Ara calculem les funcions derivades i el límit a l'infinit de cada una d'elles:

```
(%i5) define ( Df1(x) , diff(f1(x),x) );
      define ( Df2(x) , diff(f2(x),x) );

(%o5) Df1(x):= 2 x
      x^2 + 1

(%o6) Df2(x):= 3 x^2 + 4 x + 4

(%i7) 'limit(Df1(x), x, inf) = limit(Df1(x), x, inf);
      'limit(Df2(x), x, inf) = limit(Df2(x), x, inf);

(%o7) 2 ( lim x
      x->∞ x^2 + 1 ) = 0

(%o8)  lim 3 x^2 + 4 x + 4 = ∞
      x->∞

(%i9) 'limit(Df1(x)/Df2(x), x, inf) = limit(Df1(x)/Df2(x), x, inf);

(%o9) 2 ( lim x
      x->∞ (x^2 + 1) (3 x^2 + 4 x + 4) ) = 0
```

Aquest resultat permet arribar a la conclusió final:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D \log(x^2 + 1)}{D(x^3 + 2x^2 + 4x + 3)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{(x^3 + 2x^2 + 4x + 3)} = 0$$

En aquest cas, el resultat pot ser calculat de forma directa amb wxMaxima:

```
(%i10) 'limit(f1(x)/f2(x), x, inf) = limit(f1(x)/f2(x), x, inf);

(%o10)  lim log(x^2 + 1)
      x->∞ x^3 + 2 x^2 + 4 x + 3 = 0
```

Altres formes indeterminades. Les indeterminacions del tipus

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

es redueixen als casos estudiats mitjançant transformacions algebraiques i l'ús de les funcions logaritme neperià i exponencial.

08-4.- La fórmula de Taylor

Els continguts d'aquest apartat es desenvolupen al fitxer **Tema_08-4.wxm**.

Considerem una funció $f:[a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i suposem que és derivable n vegades en el punt $x_0 \in]a,b[$, és a dir, que en aquest punt existeixen les derivades d'ordre superior o successives $Df(x_0), D^2f(x_0), \dots, D^n f(x_0)$. S'anomena polinomi de Taylor de grau n de f en x_0 el polinomi:

$$T_{n;x_0}(x) = f(x_0) + \frac{Df(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{D^2f(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{D^n f(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

És immediat verificar que aquest polinomi compleix que el seu valor i el de les seves derivades d'ordre superior fins a l'ordre n coincideixen amb els corresponents de la funció, és a dir:

$$T_{n;x_0}(x_0) = f(x_0), \quad D^k T_{n;x_0}(x_0) = D^k f(x_0), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

A més, el polinomi de Taylor $T_n(x)$ de grau n de f en x_0 compleix la propietat de ser una aproximació local de grau n de la funció, és a dir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_{n;x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

El primer terme no nul del polinomi de Taylor s'anomena terme principal. El polinomi de Taylor aproxima localment la funció en un entorn del punt x_0 ; la diferència $R_{n;x_0}(x) = f(x) - T_{n;x_0}(x)$ s'anomena *residu* (o terme complementari).

Teorema (de Taylor). Si una funció $f:[a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifica:

- és contínua en l'interval $[a,b]$
- és derivable successivament en l'interval $]a,b[$
- les funcions derivades successives $Df, D^2f, \dots, D^n f$ són contínues en $]a,b[$
- existeix la derivada $D^{n+1}f$ en $]a,b[$

Aleshores si $x_0 \in [a,b]$, per a cada $x \in [a,b]$ existeix un punt $t \in]x_0, x[$ tal que:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_{n;x_0}(x) + R_{n;x_0}(x) = \\ &= f(x_0) + \frac{Df(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{D^n f(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{D^{n+1}f(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

L'expressió del residu que apareix en aquesta expressió s'anomena forma de Lagrange del residu. La fórmula de Taylor en $x_0 = 0$ s'anomena fórmula de Maclaurin.

Cal recordar que el polinomi de Taylor és una aproximació local, vàlida únicament en un entorn del punt en el qual es calcula el polinomi. La fitació de l'error comés la dóna, com és sabut, el residu o terme complementari.

Observem en primer lloc que wxMaxima escriu l'expressió del polinomi de Taylor d'una funció de manera general. La sintaxi és molt senzilla i es pot veure a continuació. Així, en un punt x_0 :

```
(%i1) taylor(f(x), x, x0, 3);
```

$$(\%o1)/T/ f(x_0) + \left(\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=x_0} \right) (x-x_0) + \frac{\left(\frac{d^2}{dx^2} f(x) \Big|_{x=x_0} \right) (x-x_0)^2}{2} + \frac{\left(\frac{d^3}{dx^3} f(x) \Big|_{x=x_0} \right) (x-x_0)^3}{6} + \dots$$

A l'origen:

```
(%i2) taylor(f(x), x, 0, 3);
```

$$(\%o2)/T/ f(0) + \left(\frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=0} \right) x + \frac{\left(\frac{d^2}{dx^2} f(x) \Big|_{x=0} \right) x^2}{2} + \frac{\left(\frac{d^3}{dx^3} f(x) \Big|_{x=0} \right) x^3}{6} + \dots$$

Vegem ara uns exemples.

Exemple 8.4.1.- Es tracta de calcular el polinomi de Taylor de graus 1, 2, 3, 4 de la funció exponencial a l'origen. En primer lloc cal definir la funció i escriure les instruccions que de wxMaxima que permeten el càlcul dels polinomis de Taylor:

```
(%i1) f1(x):=exp(x);
```

```
      taylor(f1(x), x, 0, 1);
```

```
      taylor(f1(x), x, 0, 2);
```

```
      taylor(f1(x), x, 0, 3);
```

```
      taylor(f1(x), x, 0, 4);
```

```
(%o1) f1(x):=exp(x)
```

```
(%o2)/T/ 1+x+...
```

```
(%o3)/T/ 1+x+\frac{x^2}{2}+...
```

```
(%o4)/T/ 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+...
```

```
(%o5)/T/ 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+...
```

Ara definim aquests polinomis com funcions:

```
(%i6) define ( T1(x) , taylor(f1(x), x, 0, 1) );
      define ( T2(x) , taylor(f1(x), x, 0, 2) );
      define ( T3(x) , taylor(f1(x), x, 0, 3) );
      define ( T4(x) , taylor(f1(x), x, 0, 4) );

(%o6)/T/  $T1(x) := 1 + x + \dots$ 

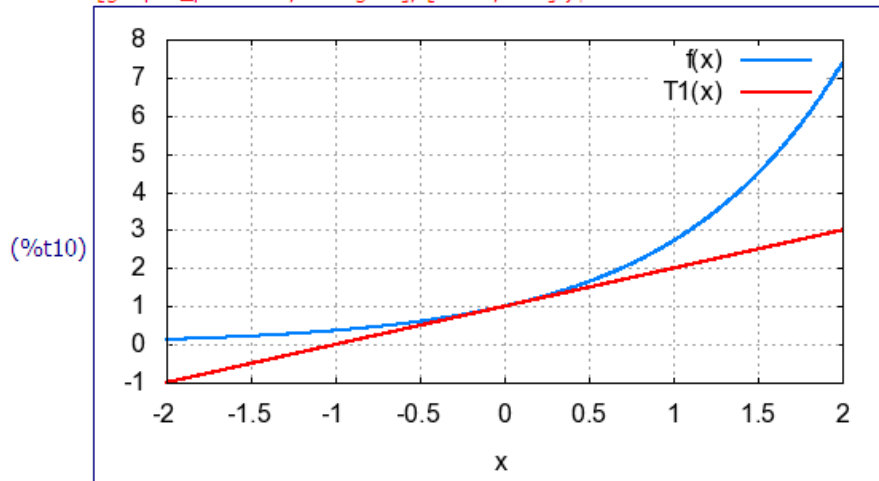
(%o7)/T/  $T2(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ 

(%o8)/T/  $T3(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$ 

(%o9)/T/  $T4(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$ 
```

A continuació es tracta d'observar gràficament que el polinomi de Taylor és una aproximació local de la funció, aproximació que millora de qualitat a mesura que s'incrementa el grau del polinomi. Per això farem unes representacions gràfiques de la funció i del polinomi de Taylor d'un grau determinat. Així, si dibuixem conjuntament la funció i el polinomi de grau 1 s'obté:

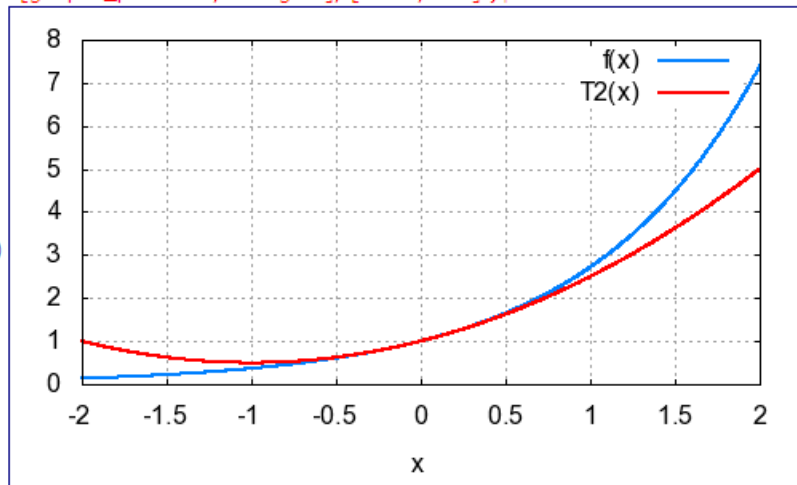
```
(%i10) wxplot2d([f1(x),T1(x)], [x,-2,2], [ylabel, ""], [legend, "f(x)", "T1(x)"], [style, [lines, 2]],
               [gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 300])$
```



Ara fem el mateix amb el polinomi de Taylor de grau 2:

```
(%i11) wxplot2d([f1(x),T2(x)], [x,-2,2], [ylabel, ""], [legend, "f(x)", "T2(x)"], [style, [lines, 2]], [gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 300])$
```

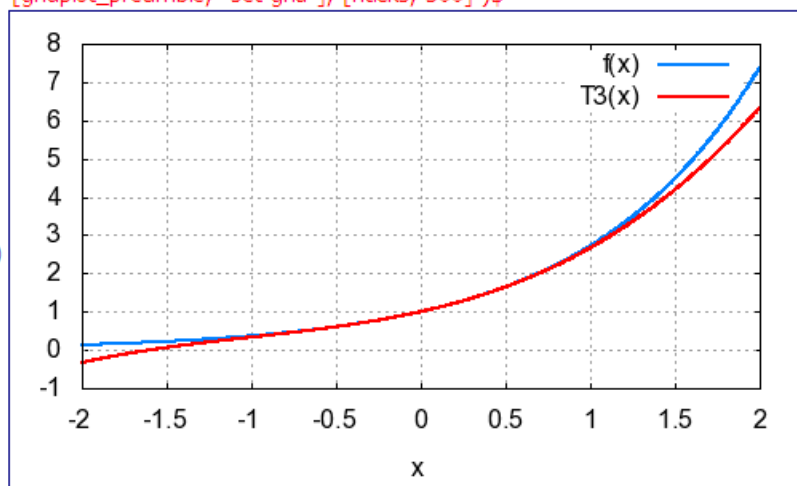
(%t11)



I ara fem el mateix amb el polinomi de Taylor de grau 3:

```
(%i12) wxplot2d([f1(x),T3(x)], [x,-2,2], [ylabel, ""], [legend, "f(x)", "T3(x)"], [style, [lines, 2]], [gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 300])$
```

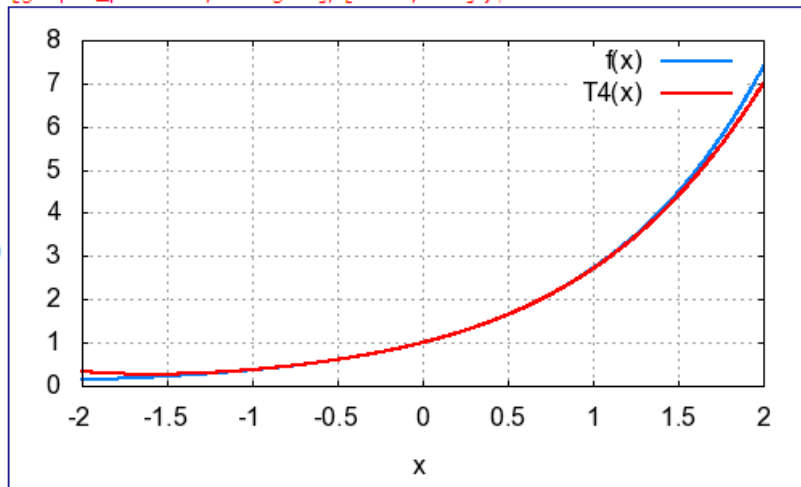
(%t12)



Com es pot observar, les dues gràfiques es van semblant cada vegada més a mesura que s'incrementa el grau del polinomi de Taylor. Vegem finalment la representació gràfica de la funció i el polinomi de Taylor de grau 4:

```
(%i13) wxplot2d([f1(x),T4(x)], [x,-2,2], [ylabel, ""], [legend, "f(x)", "T4(x)"], [style, [lines, 2]], [gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 300])$
```

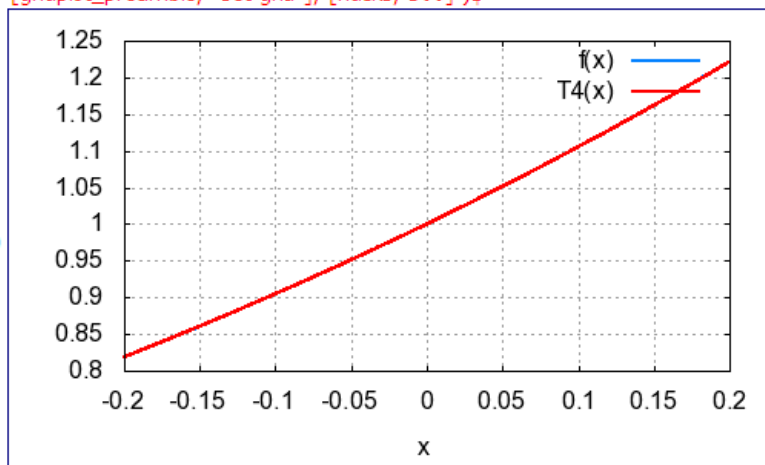
(%t13)



En aquest darrer cas s'observa que dibuix que dona el programa gairebé no permet diferenciar les dues gràfiques. Aquesta dificultat esdevé gairebé impossibilitat si l'entorn del punt es fa més petit:

```
(%i14) wxplot2d([f1(x),T4(x)], [x,-0.2,0.2], [ylabel, ""], [legend, "f(x)", "T4(x)"], [style, [lines, 2]], [gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 300])$
```

(%t14)



Exemple 8.4.2.- Es tracta de fer el mateix amb la funció definida per:

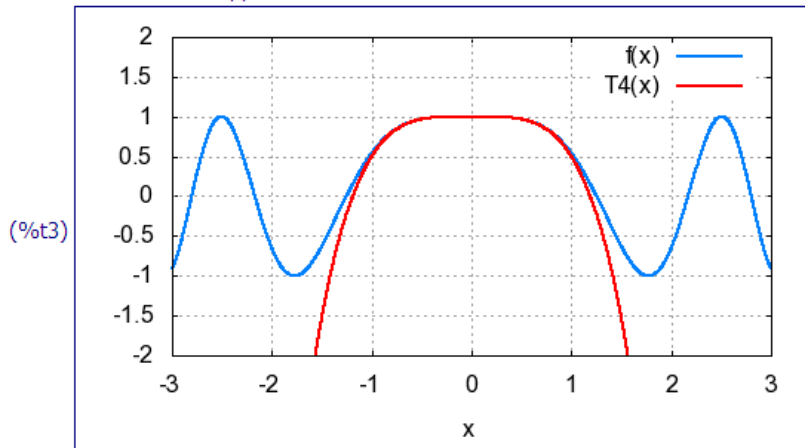
$$f(x) = \cos(x^2), x \in \mathbb{R}$$

En primer lloc calculem el polinomi de Taylor de grau 4:

```
(%i1) f(x):=cos(x^2);
      define (T4(x) , taylor(f(x), x, 0, 4) );
(%o1) f(x):=cos(x^2)
(%o2)/T/ T4(x):=1- $\frac{x^4}{2}$ + ...
```

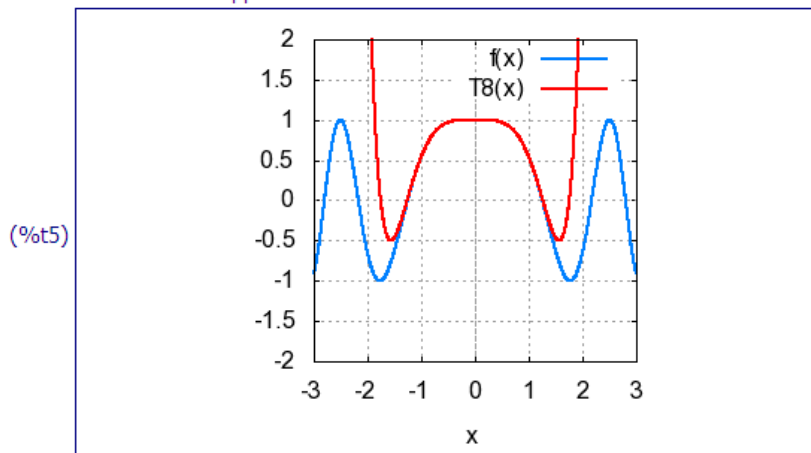
I ara fem la representació gràfica de la funció i aquest polinomi:

```
(%i3) wxplot2d([f(x),T4(x)], [x,-3,3], [y,-2, 2], [ylabel, ""], [legend, "f(x)" , "T4(x)"] ,
               [gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 300] )$
plot2d: some values were clipped.
```



Ara calculem el polinomi de Taylor de grau 8 i fem la representació gràfica conjunta:

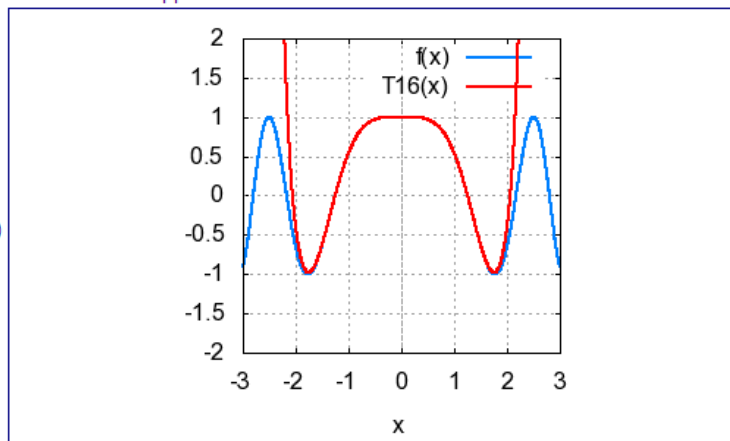
```
(%i4) define (T8(x) , taylor(f(x), x, 0, 8) );
(%o4)/T/ T8(x):=1- $\frac{x^4}{2}$ + $\frac{x^8}{24}$ + ...
(%i5) wxplot2d([f(x),T8(x)], [x,-3,3], [y,-2,2], [ylabel, ""], [legend, "f(x)" , "T8(x)"] ,
               [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 300] )$
plot2d: some values were clipped.
```



Finalment, calculem el polinomi de Taylor de grau 16 i fem la representació gràfica conjunta:

```
(%i6) define (T16(x) , taylor(f(x), x, 0, 16) );
(%o6)/T/ T16(x):=1- $\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{12}}{720}+\frac{x^{16}}{40320}+\dots$ 
(%i7) wxplot2d([f(x),T16(x)], [x,-3,3], [y,-2,2], [ylabel, ""], [legend, "f(x)" , "T16(x)"] , [style, [lines, 2]] ,
[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 300])$
plot2d: some values were clipped.
```

(%t7)



Sèries de potències.

La propietat del residu de la fórmula de Taylor permet escriure:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} T_{n;x_0}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k f(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

L'últim terme és una sèrie de potències i la igualtat anterior es coneix com desenvolupament en sèrie de potències de la funció. Amb wxMaxima es pot obtenir l'expressió del desenvolupament en sèrie de potències d'una funció, tal com es mostra a continuació.

Per exemple, per a la funció exponencial real es té:

```
(%i1) 'exp(x)=powerseries(exp(x), x, 0);
```

$$(\%o1) \%e^x = \sum_{i1=0}^{\infty} \frac{x^{i1}}{i1!}$$

Una instrucció de wxMaxima permet millorar l'estètica de la sortida:

```
(%i2) 'exp(x)=niceindices(powerseries(exp(x), x, 0));
```

$$(\%o2) \ e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

Per a les funcions sinus i cosinus:

```
(%i3) 'sin(x)=niceindices(powerseries(sin(x), x, 0));
```

$$(\%o3) \ \sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

```
(%i4) 'cos(x)=niceindices(powerseries(cos(x), x, 0));
```

$$(\%o4) \ \cos(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$$

Per a la funció arc tangent:

```
(%i5) 'atan(x)=niceindices(powerseries(atan(x), x, 0));
```

$$(\%o5) \ \operatorname{atan}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{2i+1}$$

També es pot obtenir el desenvolupament en sèrie de potències d'una funció que no estigui predefinida a wxMaxima:

```
(%i6) f4(x):=1/(1+x); 'f4(x)=niceindices(powerseries(f4(x), x, 0));
```

$$(\%o6) \ f4(x) := \frac{1}{1+x}$$

$$(\%o7) \ f4(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$$

Finalment dos exemples amb el logaritme neperià, el primer a l'origen i el segon en el punt $x_0 = 1$:


```
(%i8) 'log(x+1)=niceindices(powerseries(log(x+1), x, 0));
```

$$(\%o8) \log(x+1) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i x^i}{i}$$

```
(%i9) 'log(x)=niceindices(powerseries(log(x), x, 1));
```

$$(\%o9) \log(x) = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i (x-1)^i}{i}$$

08-5.- Aplicacions de la derivada. Optimització

Els continguts d'aquest apartat es desenvolupen al fitxer **Tema_08-5.wxm**.

Caracterització de la convexitat, la concavitat i les inflexions d'una funció.

Una funció es diu convexa en un interval $[x_1, x_2]$ si i només si es compleix:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

és a dir, si el segment que uneix els dos extrems $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ està per sobre de la gràfica de la funció. Si la desigualtat és estricta, s'acostuma a dir que la funció és estrictament convexa en l'interval. Interpretació geomètrica de la convexitat:

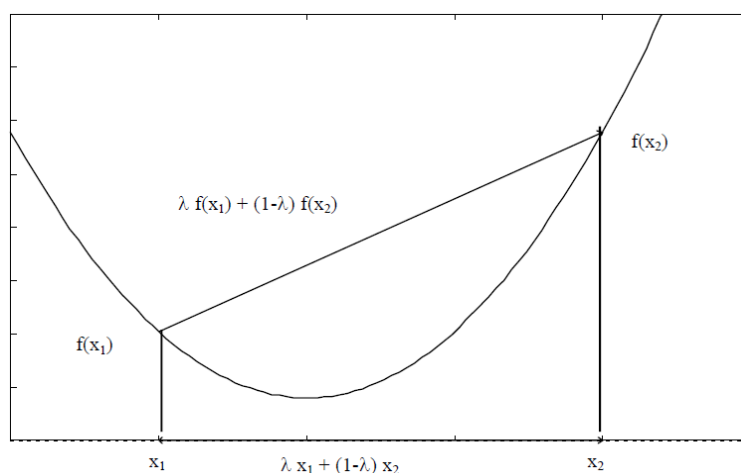


Figura 8.5.1

Una funció es diu còncava en un interval $[x_1, x_2]$ si i només si es compleix:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

és a dir, si el segment que uneix els dos extrems $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ està per sota de la gràfica de la funció. Si la desigualtat és estricta, s'acostuma a dir que la funció és estrictament còncava en l'interval. Interpretació geomètrica de la concavitat:

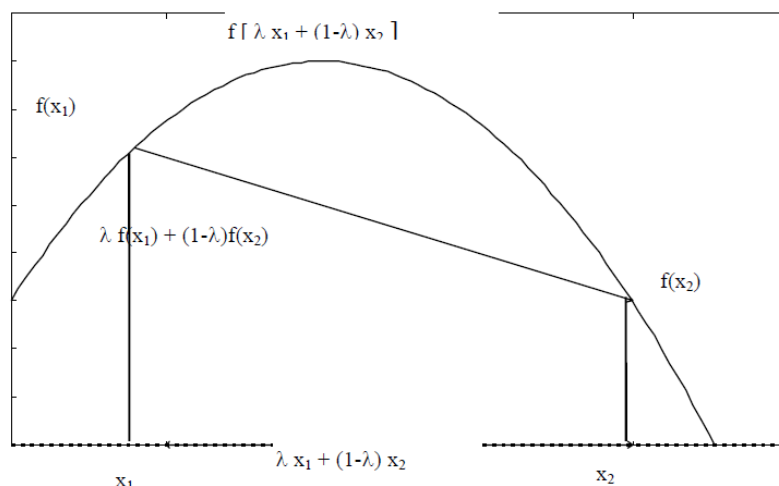


Figura 8.5.2

Un punt en el qual la funció és còncava a l'esquerra i convexa a la dreta o a la inversa es diu un punt d'inflexió. A la Figura 8.5.3 es pot veure un punt d'inflexió.

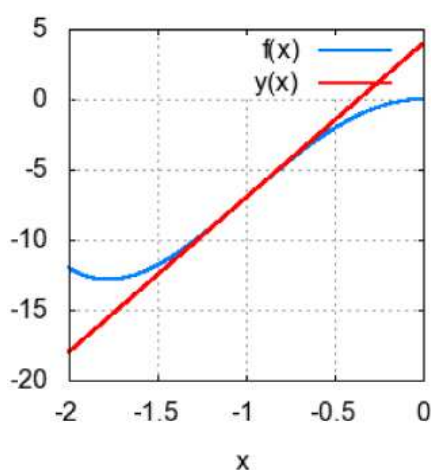


Figura 8.5.3

Una propietat important de les funcions derivables és la següent: si una funció $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és derivable dues vegades en l'interval $]a, b[$ aleshores, es verifica:

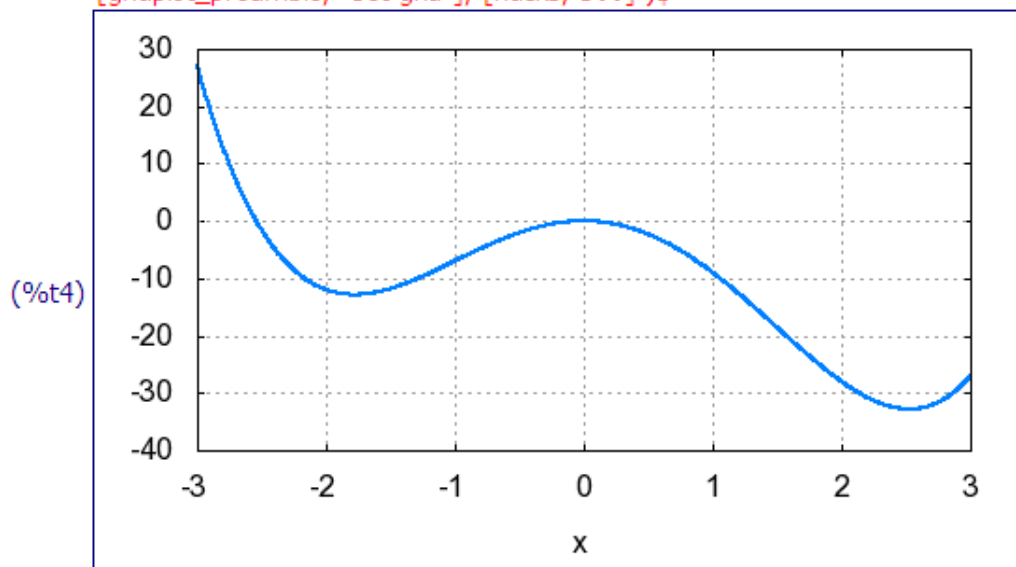
- si es compleix $Df(x) > 0, \forall x \in]c, d[$, la funció és convexa en $[c, d]$;
- si es compleix $Df(x) < 0, \forall x \in]c, d[$, la funció és còncava en $[c, d]$;
- si la funció és derivable tres vegades i es compleix $D^2 f(x_0) = 0, D^3 f(x_0) \neq 0$, el punt x_0 és un punt d'inflexió de f .

Exemple 8.5.1.- Es considera la funció definida per:

$$f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2, x \in [-3, 3]$$

Vegem la seva definició amb wxMaxima i la seva representació gràfica:

```
(%i1) f(x):=x^4-x^3-9*x^2;
(%o1) f(x):=x^4-x^3+(-9)x^2
(%i4) wxplot2d([f(x)], [x,-3, 3], [ylabel, ""], [legend, "" ], [style, [lines, 2]] ,
[gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 300] )$
```



Calculem les derivades de primer i segon ordre de la funció:

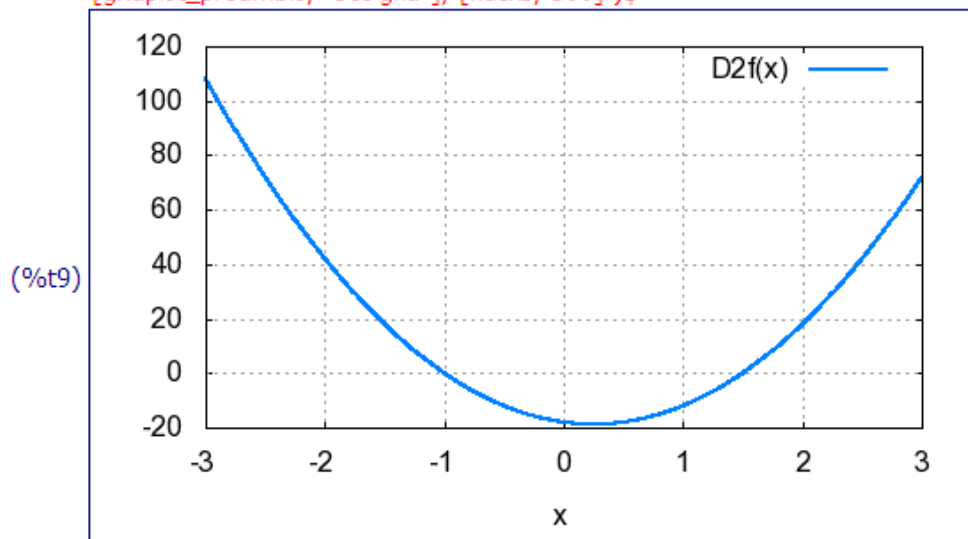
```
(%i5) define (Df(x) , diff(f(x), x) );
(%o5) Df(x):= 4 x^3 - 3 x^2 - 18 x
(%i6) define (D2f(x) , diff(f(x), x, 2) );
(%o6) D2f(x):= 12 x^2 - 6 x - 18
```

Calculem ara les arrels de la derivada de segon ordre:

```
(%i7) Eq1 : D2f(x) = 0 ;
      solve([Eq1], [x]);
(%o7) 12 x^2 - 6 x - 18 = 0
(%o8) [x = 3/2, x = -1]
```

Vegem la representació gràfica de la derivada segona:

```
(%i9) wxplot2d([D2f(x)], [x,-3, 3], [ylabel, ""], [legend, "D2f(x)" ], [style, [lines, 2]] ,
[gnuplot_preamble, "set grid"], [nticks, 300] )$
```



Per tant, es pot afirmar que, per exemple, la funció és convexa en $[-3,-2]$ i la funció és còncava en $[0,1]$. Estudiem les arrels de la derivada segona per veure si són punts d'inflexió, per a la qual cosa caldrà calcular la derivada de tercer ordre i avaluar-la en aquests punts:

```
(%i10) define (D3f(x) , diff(f(x), x, 3) );
(%o10) D3f(x):= 24 x-6
(%i11) x1=x1:-1;      'D3f(x1) = D3f(x1);
(%o11) x1 = -1
(%o12) D3f(-1) = -30
(%i13) x2=x2:3/2;     'D3f(x2)=D3f(x2);
(%o13) x2 = 3/2
(%o14) D3f(3/2) = 30
```

Per tant, en efecte, aquests punts són punts d'inflexió de la funció, ja que la derivada de tercer ordre de la funció en aquests punts no és nul·la.

Resolució d'equacions: el mètode de Newton – Raphson.

El mètode de Newton – Raphson, o simplement de Newton, és un mètode iteratiu per a l'aproximació dels zeros d'una funció derivable.

La fórmula d'iteració és la següent:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{Df(x_n)}, \quad n \geq 1$$

La interpretació geomètrica és prou coneguda: es tracta d'aproximar el zero mitjançant les interseccions de les successives rectes tangents a la gràfica de la funció, com es pot veure a la Figura 8.5.4:

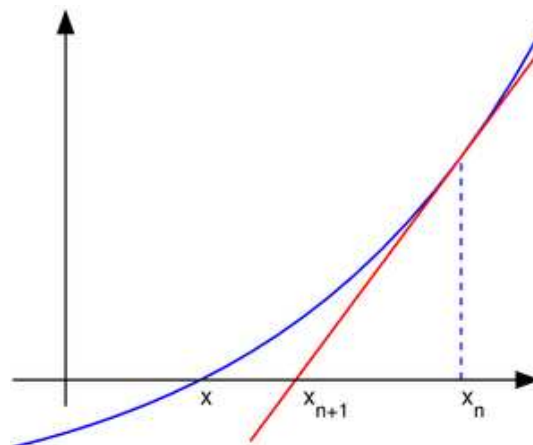


Figura 8.5.4

Exemple 8.5.2.- Es tracta de resoldre l'equació

$$x^2 - 8 \log(x) = 0$$

En primer lloc intentem resoldre-la amb wxMaxima:

```
(%i1) Eq1: x^2 - 8*log(x) = 0;
      solve(Eq1, x);
(%o1) x^2 - 8 log(x) = 0
(%o2) [x = -2^(3/2)*sqrt(log(x)), x = 2^(3/2)*sqrt(log(x))]
```

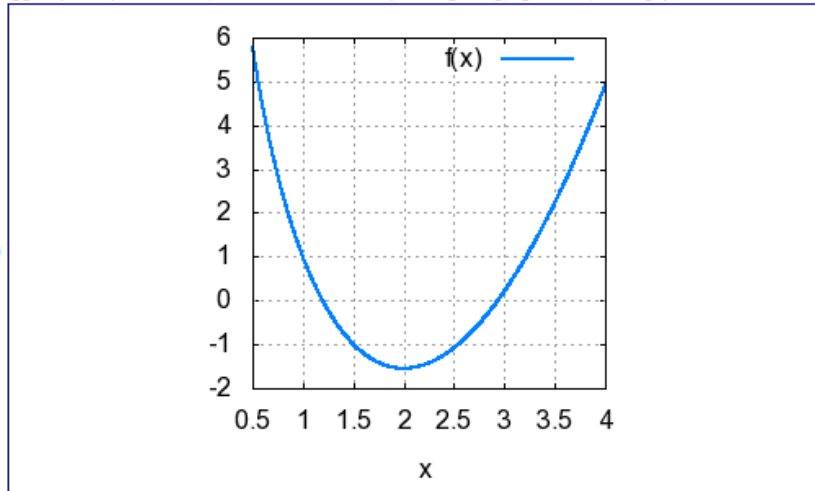
Vegem que el programa no ens dona una resposta adient. Aplicarem el mètode de Newton amb la funció $f(x) = x^2 - 8 \log(x)$. En primer lloc hem de definir la funció i calcular la funció derivada, ja que intervé en la fórmula recurrent:

```
(%i3) f(x) := x^2 - 8*log(x);
(%o3) f(x) := x^2 - 8 log(x)
(%i4) define (Df(x), diff(f(x), x));
(%o4) Df(x) := 2 x - 8/x
```

Ara fem una representació de la gràfica de la funció per saber en quin interval es troben les solucions i poder dissenyar el procediment iteratiu corresponent:

```
(%i5) wxplot2d([f(x)], [x, 0.5, 4], [y, -2, 6], [ylabel, ""], [legend, "f(x)"], [style, [lines, 2]], [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 300])$
```

(%t5)



Observem que hi ha un zero en l'interval $I_1 =]1, 1.5[$ i un altre zero en l'interval $I_2 =]2.5, 3[$. Tot seguit iniciem el procés iteratiu per calcular el zero en I_2 amb $x_1 = 4$:

```
(%i6) x1=x1:4; x2=x2:x1 - (f(x1))/(Df(x1)), numer;
(%o6) x1 = 4
(%o7) x2 = 3.181725814826521
(%i8) x3=x3:x2 - (f(x2))/(Df(x2)), numer;
(%o8) x3 = 2.957260178756791
(%i9) x4=x4:x3 - (f(x3))/(Df(x3)), numer;
(%o9) x4 = 2.935049208792494
(%i10) x5=x5:x4 - (f(x4))/(Df(x4)), numer;
(%o10) x5 = 2.934820198893187
(%i11) x6=x6:x5 - (f(x5))/(Df(x5)), numer;
(%o11) x6 = 2.934820174464085
```

Sembla que ja es tenen almenys sis decimals exactes i si la precisió es considera suficient, es pot aturar el procés iteratiu. Amb wxMaxima hi ha una instrucció que permet aquest càlcul de forma directa i amb la precisió que es vulgui. La sintaxi és la següent:

```
(%i12) load(newton1)$
newton(x^2 - 8*log(x), x, 4, 10^(-5));
(%o13) 2.934820198893187
```

Si es desitja una precisió més fina, és a dir, una fita menor de l'error, aleshores cal indicar-ho en la instrucció. Així:

```
(%i14) load(newton1)$
      newton(x^2 - 8*log(x), x, 4, 10^(-9));
(%o15) 2.934820174464085
```

Ara podem calcular amb aquesta metodologia el zero de la funció en l'interval I_1 :

```
(%i16) load(newton1)$
      newton(x^2 - 8*log(x), x, 1, 10^(-9));
(%o17) 1.195663759058167
```

Variacions respecte al temps.

En molts problemes d'aplicació de la derivada es plantegen situacions en les quals hi intervenen funcions que depenen del temps. A continuació es mostra un exemple de l'aplicació de la derivada a una d'aquestes situacions.

Exemple 8.5.3.- Es té un embut cònic recte circular que té un radi de la base de radi $R = 20\text{cm}$ i una altura de $H = 40\text{cm}$. L'embut està situat amb al vèrtex cap avall i hi entra líquid per la part superior amb un cabal de $q = 200 \text{ cm}^3/\text{min}$. Si inicialment l'embut està buit, es tracta de calcular la funció que expressa el nivell del líquid contingut a l'embut en funció del temps i raonar que es tracta d'una funció creixent.

Si es designen per $r(t)$, $y(t)$ les funcions que expressen el radi de la base i l'altura, respectivament, del con que forma el líquid dins l'embut en l'instant t , aleshores el volum de líquid contingut a l'embut és

```
(%i1) V(t):=(%pi/3)*r(t)^2*y(t);
(%o1) V(t):= $\frac{\pi}{3} r(t)^2 y(t)$ 
```

De la geometria del problema deduïm que:

```
(%i2) r(t):=(R/H)*y(t);      'V(t) = V(t);
(%o2) r(t):= $\frac{R}{H} y(t)$ 
(%o3) V(t)= $\frac{\pi y(t)^3 R^2}{3 H^2}$ 
```

Per tant, igualant aquest volum al que se sap que hi ha dins l'embut com a producte del cabal d'entrada pel temps, resulta:


```
(%i4) Eq22: q*t=V(t);
```

```
(%o4) 
$$q t = \frac{\pi y(t)^3 R^2}{3 H^2}$$

```

D'aquesta equació podem deduir l'expressió de la funció altura de líquid:

```
(%i5) (y(t))^3 = (3*q*H^2) / (%pi*R^2) * t;
```

```
(%o5) 
$$y(t)^3 = \frac{3 q t H^2}{\pi R^2}$$

```

```
(%i6) define (y(t) , ((3*q*H^2)/(%pi*R^2))^(1/3) * t^(1/3) );
```

```
(%o6) 
$$y(t) := \frac{3^{1/3} q^{1/3} t^{1/3} H^{2/3}}{\pi^{1/3} R^{2/3}}$$

```

Si designem per K el coeficient que multiplica a l'arrel cúbica del temps, aleshores podem expressar la funció altura de líquid a l'embut:

```
(%i7) q=q:200$ R=R:20$ H=H:40$
```

```
(%i10) 'K=((3*q*H^2)/(%pi*R^2))^(1/3), numer;
```

```
(%o10) K = 9.141562994681664
```

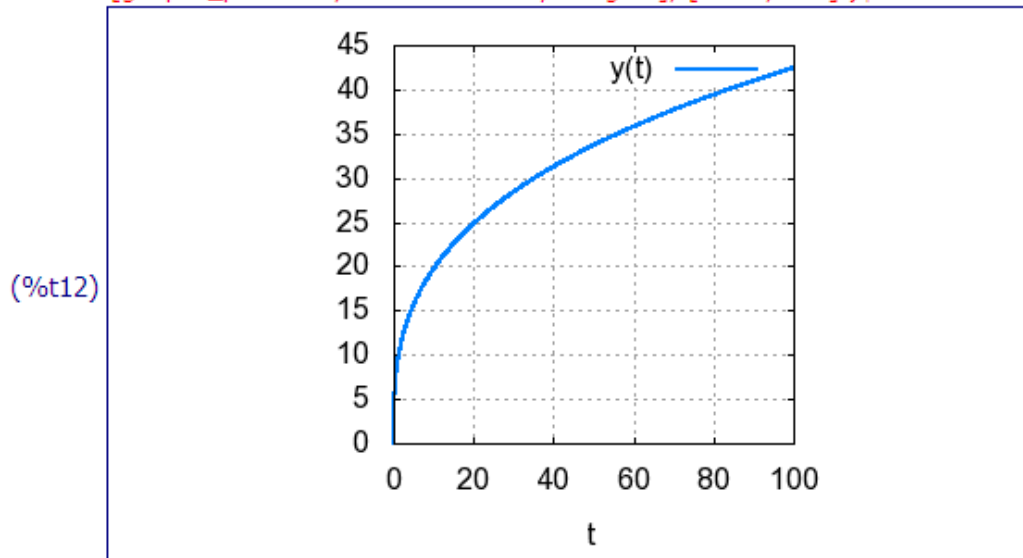
```
(%i11) define (y(t) , K*t^(1/3) );
```

```
(%o11) 
$$y(t) := 9.141562994681664 t^{1/3}$$

```

La representació de la gràfica d'aquesta funció és:

```
(%i12) wxplot2d([y(t)], [t, 0,100], [ylabel, ""], [legend, "y(t)" ], [style, [lines, 2]] ,  
[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 300] )$
```



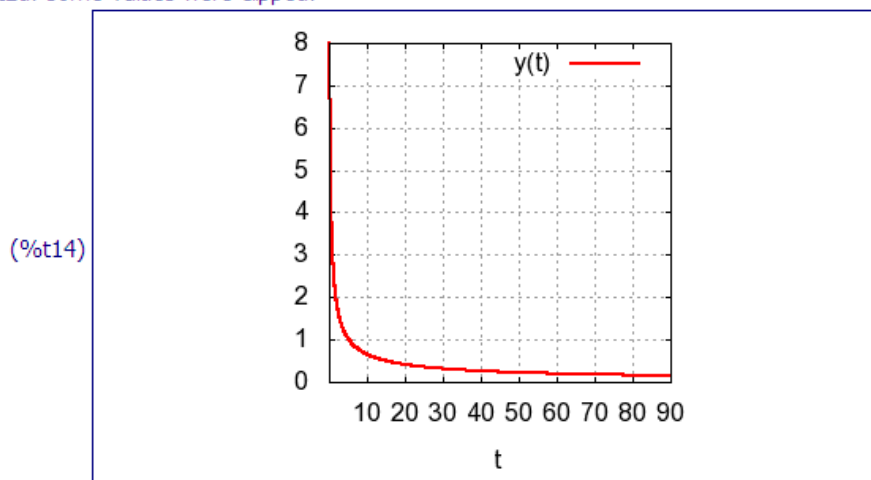
El creixement es pot observar a la gràfica; tanmateix es pot analitzar aquesta característica de la funció veient el signe de la funció derivada:

```
(%i13) define (Dy(t), diff(y(t), t));
(%o13) Dy(t):=
$$\frac{3.047187664893888}{t^{2/3}}$$

```

Atès que aquesta derivada és positiva en tot punt, es pot concloure el creixement de la funció. Ara es pot raonar que la velocitat a la que va augmentant el nivell del líquid a l'interior de l'embut és decreixent amb el temps. En primer lloc farem la representació gràfica d'aquesta derivada:

```
(%i14) wxplot2d([Dy(t)], [t, 0.1, 90], [y, 0, 8], [ylabel, ""], [legend, "y(t)"], [style, [lines, 2, 2]],
[gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 300])$
plot2d: some values were clipped.
```



Ara verificarem que la derivada de l'altura és decreixent calculant la derivada de segon ordre i veient que és negativa:

```
(%i15) diff(Dy(t), t);
(%o15) 
$$-\frac{2.031458443262592}{t^{5/3}}$$

```

Finalment, es pot fer algun càlcul com per exemple calcular la velocitat a que augmenta el nivell de líquid a l'embut quan l'altura de líquid és de 25cm, per a la qual cosa determinarem en quin instant s'assoleix aquesta altura i després calcularem la derivada de l'altura en aquest instant:

```
(%i17) Eq24: y(t)=25; solve([Eq24], t);
(%o17) 9.1416 t1/3 = 25
rat: replaced 9.1416 by 8072/883 = 9.1416
(%o18) [t= $\frac{10757271671875}{525948789248}$ ]
(%i19) t0 = t0 : 10757271671875/525948789248, numer;
(%o19) t0 = 20.453
```

```
(%i20) 'Dy(t0)=Dy(t0);
(%o20) Dy(20.453)= 0.407
```

Optimització.

Una de les aplicacions més significatives de la derivada és la determinació d'extremes d'una funció, problemes que es coneixen com optimització. Vegem-ne un exemple.

Exemple 8.5.4.- Es considera un cercle de radi R ; es tracta de determinar el sector circular que cal extreure per tal que amb el que queda de cercle es formi un con de volum màxim.

Disseguem per x l'angle (en radians) del sector que s'extreu. Calculem la longitud de l'arc d'aquest sector i de la part restant:

```
(%i1) L1(x):=R*x;    L2(x):=2*%pi*R - R*x;
(%o1) L1(x):= R x
(%o2) L2(x):= 2 π R - R x
```

El radi de la base del con que es forma amb el que queda de cercle és:

```
(%i3) r(x):=(2*%pi*R - R*x)/(2*%pi);
(%o3) r(x):= \frac{2 \pi R - R x}{2 \pi}
```

Pel teorema de Pitàgores calculem l'altura d'aquest con:

```
(%i4) h(x):=sqrt(R^2 - ((2*%pi*R - R*x)/(2*%pi))^2);
(%o4) h(x):= \sqrt{R^2 - \left(\frac{2 \pi R - R x}{2 \pi}\right)^2}
```

I ara podem calcular el seu volum:

```
(%i5) V(x):=(%pi/3)*(r(x)^2)*h(x);
(%o5) V(x):= \frac{\pi}{3} r(x)^2 h(x)
```

És clar que aquesta funció està definida en l'interval $[0, 2\pi]$. Per determinar el màxim d'aquesta funció calculem la funció derivada:

```
(%i6) diff(V(x), x);
```

$$(\%o6) \frac{R (2 \pi R - x R)^3}{48 \pi^3 \sqrt{R^2 - \frac{(2 \pi R - x R)^2}{4 \pi^2}}} - \frac{R (2 \pi R - x R) \sqrt{R^2 - \frac{(2 \pi R - x R)^2}{4 \pi^2}}}{6 \pi}$$

Sembla raonable intentar simplificar aquesta expressió:

```
(%i7) ratsimp(%);
```

$$(\%o7) -\frac{(2 x^3 - 12 \pi x^2 + 16 \pi^2 x) R^4 + (x^3 - 6 \pi x^2 + 12 \pi^2 x - 8 \pi^3) R^4}{24 \pi^2 \sqrt{4 \pi x - x^2} |R|}$$

Ara podem definir-la com funció:

```
(%i8) DV(x):=-((2*x^3-12*pi*x^2+16*pi^2*x)*R^4+
(x^3-6*pi*x^2+12*pi^2*x-8*pi^3)*R^4)/(24*pi^2*sqrt(4*pi*x-x^2)*R);
```

$$(\%o8) DV(x):=-\frac{((2 x^3 - 12 \pi x^2 + 16 \pi^2 x) R^4 + (x^3 - 6 \pi x^2 + 12 \pi^2 x - 8 \pi^3) R^4)}{24 \pi^2 \sqrt{4 \pi x - x^2} R}$$

Per calcular els punts crítics igualem a zero i resollem:

```
(%i9) Eq1:DV(x)=0;
```

$$(\%o9) \frac{-(2 x^3 - 12 \pi x^2 + 16 \pi^2 x) R^4 - (x^3 - 6 \pi x^2 + 12 \pi^2 x - 8 \pi^3) R^4}{24 \pi^2 \sqrt{4 \pi x - x^2} R} = 0$$

```
(%i10) solve([Eq1], [x]);
```

$$(\%o10) [x = -\frac{(2 \sqrt{6} - 6) \pi}{3}, x = \frac{(2 \sqrt{6} + 6) \pi}{3}, x = 2 \pi]$$

Ara calculem numèricament aquestes solucions:

```
(%i11) x1=x1:-((2*sqrt(6)-6)*%pi)/3, numer;
x2=x2:((2*sqrt(6)+6)*%pi)/3, numer;
x3=x3:2*pi, numer;
```

```
(%o11) x1 = 1.152985986532131
```

```
(%o12) x2 = 11.41338462782704
```

```
(%o13) x3 = 6.283185307179586
```

La segona no pertany a l'interval i, per tant, es pot descartar. La tercera és precisament l'extrem superior de l'interval, en el qual la funció volum és nul·la. Per tant cal considerar només la primera i per determinar la tipologia de l'extrem cal calcular la derivada segona en aquest punt:

```
(%i14) diff(DV(x), x);
(%o14) 
$$\frac{-(6x^2 - 24\pi x + 16\pi^2)R^4 - (3x^2 - 12\pi x + 12\pi^2)R^4}{24\pi^2\sqrt{4\pi x - x^2}R} - \frac{(4\pi - 2x)(- (2x^3 - 12\pi x^2 + 16\pi^2 x)R^4 - (x^3 - 6\pi x^2 + 12\pi^2 x - 8\pi^3)R)}{48\pi^2(4\pi x - x^2)^{3/2}R}$$

(%i15) D2V(x):=(-9*x^2+36*%pi*x-28*%pi^2)/(24*%pi^2*sqrt(4*%pi*x-x^2)) - ((4*%pi-2*x)*(-3*x^3+18*%pi*x^2-28*%pi^2*x+8*%pi^3))/(48*%pi^2*(4*%pi*x-x^2)^(3/2));
(%o15) D2V(x):=
$$\frac{(-9)x^2+36\pi x+(-28)\pi^2}{24\pi^2\sqrt{4\pi x-x^2}} - \frac{(4\pi-2x)((-3)x^3+18\pi x^2+(-28)\pi^2 x+8\pi^3)}{48\pi^2(4\pi x-x^2)^{3/2}}$$

(%i16) 'D2V(x1)=D2V(x1), numer;
(%o16) D2V(1.152985986532131)=-0.18377629847393
```

Per tant la funció és còncava i es tracta d'un màxim local. Aquest extrem és absolut ja que el volum és nul als extrems de l'interval. Per il·lustrar gràficament el problema es fa una representació gràfica de la funció volum amb un radi unitat:

```
(%i22) wxplot2d([V(x)], [x, 0, 2*%pi], [ylabel, ""], [legend, "V(x)"], [style, [lines, 2, 3]], [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set grid"], [nticks, 300])$
```

(%t22)

