

Tema 8

Exercicis resolts

08.1. Calculeu els extrems locals i absoluts

a) de la funció $f(x) = 1 + \frac{|9 - x^2|}{2}$ en l'interval $[-6, 4]$.

b) de la funció $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ en l'interval $[-10, 10]$.

08.2. Es considera l'equació $x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$. Indiqueu intervals en què hi pugui haver una solució de l'equació i calculeu-la aproximadament en un cas, donant una fita superior de l'error comès.

08.3. Raoneu que l'equació $x^2 = 18 \log(x)$ té una única solució en l'interval $[1, e]$ i calculeu-la.

08.4. Raoneu que l'equació $e^{x-1} - \frac{1}{x+1} = 0$ té una única solució real i calculeu-la.

08.5. Calculeu els límits següents:

a) $\lim_0 \frac{\sin(2x)}{3x - x^2}$

b) $\lim_0 \frac{e^{2x} \sin(2x)}{e^{3x} \sin(3x)}$

c) $\lim_0 \frac{1 - \cos(x)}{e^x + e^{-x} - 2}$

d) $\lim_0 \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin(x)}$

e) $\lim_0 x (\log(x))^2$

f) $\lim_0 \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right)$

08.6. Calculeu els límits que segueixen raonant en cada cas el motiu pel qual no es poden calcular per aplicació de la regla de L'Hôpital:

a) $\lim_{+\infty} \frac{x + \sin(x)}{x - \sin(x)}$

b) $\lim_{0^+} \frac{\sin(x)}{x^2 \sin(1/x)}$

08.7. Calculeu el polinomi de Taylor de graus 4, 6, 8, 10 a l'origen de les funcions següents:

a) $\exp(-2x^2)$ b) $\log(1+x^2)$ c) $\frac{1}{1+x^2}$

Feu una representació gràfica de la funció i dels polinomis de Taylor calculats en un entorn de l'origen.

08.8. Calculeu una fita de l'error que es comet si es pren l'aproximació

$$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Calculeu aproximadament $\log(1.0035)$ i fiteu l'error comès en aquesta aproximació.

08.9. Un objecte de 4.95m d'altura es troba justament a sota d'un focus de llum situat a 20.62m d'altura. L'objecte comença a desplaçar-se cap a la dreta a una velocitat de 3.987m/s. Determineu: a) la velocitat de l'extrem de l'ombra de l'objecte; b) la variació de la longitud de l'ombra per unitat de temps.

08.10. Dos costats paral·lels d'un rectangle s'allarguen a la velocitat de 2.158cm/s mentre que els altres dos s'escurcen de manera que l'àrea del rectangle és constant en el temps i igual a 50cm². Calculeu la velocitat de variació del perímetre del rectangle quan la longitud dels costats que creixen és 5.172cm. Calculeu les dimensions del rectangle quan el perímetre deixa de disminuir.

08.11. Una dissolució passa d'un filtre cònic de 25.41cm d'altura i 15.96cm de diàmetre a un dipòsit cilíndric de 12.34cm de diàmetre. Calculeu la velocitat a la qual puja el nivell de líquid al dipòsit quan la dissolució del filtre té 12cm de profunditat i el seu nivell baixa a la velocitat de 1.034cm/min.

08.12. Determineu l'equació de la recta que passant pel punt $P(1.083, 2.176)$ determina amb els eixos de coordenades un segment de longitud mínima en el primer quadrant.

08.13. La base d'un triangle es troba al semieix de les abscisses positives, el segon costat es troba sobre la recta d'equació $y = 2x$ i el tercer costat passa pel punt (6,2). Determineu el pendent d'aquest tercer costat per tal que l'àrea del triangle sigui mínima.

08.14. Es considera un filferro de longitud L , el qual es talla en dues parts: amb la primera es forma un quadrat i amb la segona una circumferència. Calculeu la longitud de cada part per tal que la suma de les àrees d'aquestes figures sigui: a) màxima; b) mínima.

08.15. Una finestra d'un habitatge està formada per dues peces, la primera amb la forma habitual d'un marc rectangular i a la part superior un semicercle (amb diàmetre). Si la longitud total del material emprat en la construcció de la finestra és de 8.428m, calculeu el disseny (dimensions de la part rectangular i la part semicircular) que assoleix una màxima il·luminació, és a dir, una àrea màxima de la finestra.

08.16. Un camp de futbol és un rectangle que té les mides següents: 107 m de llarg i 72 m d'ample. La porteria té una longitud de 7,32 m i està situada de forma centrada en la part més estreta del rectangle. El defensa lateral dret inicia una aproximació cap a la porteria contrària paral·lelament a 1 m de la línia de banda. A quina distància de la porteria té un angle màxim de gol ?

08.17. Admetent que la resistència a la flexió d'una biga de secció rectangular és proporcional al producte de la base pel quadrat de l'altura de la secció, determineu les dimensions de la biga de resistència màxima que es pot obtenir d'un tronc cilíndric de radi R . Aplicació al cas $R = 1.267\text{m}$. Feu una representació gràfica de la resistència de la biga en funció de la seva amplada, amb una constant de proporcionalitat $K = 100$.

08.18. Una fàbrica F està ubicada a la vora d'un riu d'amplada 20m; a l'altra vora del riu i a una distància de 180m aigües avall hi ha un magatzem M vinculat a la fàbrica. Es vol connectar la xarxa informàtica des de F fins a M per controlar eficientment els estocs. Per fer-ho es demana un pressupost que diu que el cost per posar cable sota l'aigua és de 60€/m i per posar-lo per terra és de 40€/m, material i mà d'obra inclosa (sense IVA). Calculeu el disseny que minimitza el cost total del cable entre F i M i calculeu el cost total, sabent que el tipus d'IVA que s'aplica és el 18%.

08.19. Un canal de reg està fet de formigó i té la forma d'un trapezi isòsceles amb tres costats de 4.523m. Calculeu la forma del canal si es vol que tingui una secció màxima per al pas de l'aigua. Feu una representació gràfica de la funció àrea de la secció del canal i verifiqueu el resultat obtingut.

08.20. Un magatzem té la forma d'un paral·lelepípede de base quadrada i un volum V m^3 . Per les parets laterals es produeix una entrada de calor de q cal/s.m^2 i per la teulada de tres vegades més.

1) Si se suposa que no hi ha entrada de calor pel terra, calculeu les dimensions que ha de tenir el magatzem per tal que l'entrada de calor sigui mínima.

2) Calculeu, en les condicions calculades a l'apartat anterior, el calor que entra al magatzem en una hora, sabent que aquest té un volum de 12000 m^3 i que $q = 20 \text{ cal/s.m}^2$.