

Tema 7

Exercicis resolts

07.1. Estudieu la derivabilitat i calculeu la funció derivada de les funcions següents:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = |x| + x|x| \\ \text{b)} & f(x) = |x^2 - 3| \\ \text{c)} & f(x) = |2x - 3| \\ \text{d)} & f(x) = |x^3 - 2| \end{array}$$

07.2. Estudieu la derivabilitat de les següents funcions definides per:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en funció del nombre natural n .

07.3. Calculeu les derivades de les funcions que es donen a continuació i simplifiqueu el màxim possible el resultat obtingut en el primer càlcul:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = \cos\left(x + \frac{1}{\log(x^2 + 2)}\right) \\ \text{b)} & f(x) = \arctan(\log(x)) + \log(\arctan(x)) \\ \text{c)} & f(x) = \sqrt{\cos(x)} a^{\sqrt{\cos(x)}} \\ \text{d)} & f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}} \\ \text{e)} & f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\right) \\ \text{f)} & f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \end{array}$$

07.4. a) Calculeu els punts de la corba plana $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ en els quals la tangent a la corba és paral·lela a l'eix d'abscisses.

b) Calculeu les equacions de la recta tangent i la recta normal a la corba plana d'equació $y = (x-1)^{2/3}$ en el punt en el qual l'abscissa és $x_0 = 2.451$.

07.5. a) Determineu els punts de la corba plana $f(x) = (x-1)^3$ en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $y = x + 1$.

b) Calculeu els punts en que la recta tangent a la corba plana $y = x - \frac{1}{x}$ és paral·lela a la recta d'equació $y = 2x - 5$. Calculeu les equacions de la recta tangent i la recta normal en aquests punts.

07.6. Calculeu l'àrea del triangle format per l'eix d'ordenades i les rectes tangent i normal a la corba plana d'equació $y = 6x - x^2$ en el punt (5,5).

07.7. a) Determineu la paràbola d'equació $y^2 = ax + b$ que és tangent a la bisectriu del primer quadrant en el punt en el qual l'abscissa és $x_0 = 4.2063$.

b) Raoneu que a la paràbola d'equació $y = Ax^2 + Bx + C$ la corda que uneix els punts d'abscissa $x = a$ i $x = b$ és paral·lela a la recta tangent a la paràbola en el punt d'abscissa $x = \frac{a+b}{2}$. Feu una representació gràfica en un cas concret.

07.8. Es considera la funció $f(x) = |x|^3$. Estudieu l'existència i calculeu, si s'escau, les derivades de primer, segon i tercer ordre de la funció.

07.9. Calculeu les derivades successives fins a l'ordre 6 de les funcions que es donen a continuació:

a) $f(x) = \exp(x^2)$

b) $f(x) = (1+x^2) \arctan(x)$

c) $f(x) = \log(1+x^2)^{1/3}$

d) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

07.10. a) Determineu el subconjunt de la recta real en el qual es pot aproximar $(2x+1.24)^{1/6}$ per $(2x)^{1/6}$ amb un error inferior a 10^{-4} .

b) Determineu el subconjunt de la recta real en el qual es pot aproximar $\log(1.232x + 5.246)$ per $\log(1.232x)$ amb un error inferior a 10^{-4} .

07.11. La resistència elèctrica d'un fil conductor és directament proporcional a la seva longitud i inversament proporcional al quadrat del seu radi (la constant de proporcionalitat s'anomena resistivitat del material). Aproximeu el percentatge d'error en la mesura de la resistència si en la mesura del radi es comet un error del 3.45%.

07.12. Aplicant derivació implícita, calculeu les equacions de la recta tangent i la recta normal a les corbes planes següents, en el punt indicat:

- a) Corba plana $3 - y = y^x$, punt d'abscissa $x = 0$;
- b) Corba plana $y = x - 2\log(y)$, punt d'ordenada $y = 1$.

07.13. Es considera la corba plana d'equació $y = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

- a) Determineu els punts de la corba en que la tangent és paral·lela a la recta d'equació $2x - y + 8 = 0$.
- b) Determineu els punts de la corba en que la tangent és perpendicular a la recta d'equació $4x + 5y + 75 = 0$.

07.14. Es considera la corba plana d'equació $3x^3y - y^4 + 5x^2 + 5 = 0$. Es demana:

- a) Feu una representació gràfica d'aquesta corba plana, amb $-3 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 4$.
- b) Si se suposa que en un entorn del punt $(1, 2)$ la corba anterior defineix implícitament una funció diferenciable que designen $y(x)$ tal que $y(1) = 2$, calculeu la funció derivada d'aquesta funció implícita i el seu valor en $x = 1$.
- c) Calculeu la recta tangent i la recta normal a la corba plana en el punt $(1, 2)$.
- d) Calculeu les funcions derivades de segon i tercer ordre de la funció $y(x)$ i el seu valor en el punt $x = 1$.