

Tema 6

Exercicis resolts

06.1. Una funció f es diu parell si es compleix $f(-x) = f(x)$, $x \in [-a, a] \subset \mathbb{R}$ i es diu senar si es compleix $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-a, a] \subset \mathbb{R}$.

Es demana:

- a) Interpreteu geomètricament el significat d'aquestes definicions.
- b) Es consideren les funcions

$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) ; \quad f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$

Raoneu si es tracta de funcions parells o senars. Representeu-les gràficament.

- c) Raoneu que qualsevol funció $f: [-a, a] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es pot escriure com la suma d'una funció parell i d'una funció senar. Apliqueu-ho a les funcions $f(x) = \exp(x)$ i $f(x) = x^3 + 5x + 4$.

06.2. De les funcions que es donen a continuació, raoneu si la funció és estrictament creixent en un interval o subconjunt de la recta real i calculeu l'expressió analítica de la seva funció inversa, cas que existeixi. Feu una gràfic en el qual hi hagi la gràfica de la funció, la de la seva inversa i la recta d'equació $y = x$; comenteu aquest gràfic.

a) $f(x) = 2.34x - 1.87$

b) $f(x) = \frac{1}{x-5}$

c) $f(x) = x^3 + 3.02x^2 + 3.034x + 1.087$

d) $f(x) = 1.0234 \exp(1.02x)$

06.3. Es consideren les funcions definides per

$$f_1(x) = x^2 - 1.023; \quad f_2(x) = 3.43x - 1.024; \quad f_3(x) = \frac{1.23}{0.987 + x^2}$$

Calculeu les funcions:

- a) $2.35 f_1 - 4.987 f_3$ b) $(f_1 + 5.43 f_2) / (f_3)^2$
 c) $f_1 \circ f_1 \circ f_1$ d) $\frac{1}{f_1 \circ f_3}$
 e) $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$ f) $(f_1 + f_2) \circ f_3$

06.4. Definiu amb wxMaxima i representeu gràficament les següents funcions definides a intervals:

- a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1.02}{0.9851 + 1.024x^2}, & x < 4 \\ \exp(4 - 1.02x), & x \geq 4 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \exp(1.00234x), & x < 0 \\ \exp(-1.00542x), & x \geq 0 \end{cases}$
 c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x - 2}, & 0 < x < 2 \\ \log(x - 2), & x \geq 2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} e^{1.02x} \cos(0.45x), & x \leq 0 \\ 0.432x^2 + 1, & 0 < x \leq 2 \\ 2.0032 \log(x), & 2 < x \leq 4 \\ \frac{34.561}{1 + 1.0034x^2}, & x > 4 \end{cases}$

06.5. Estudieu l'existència i calculeu, si s'escau, els límits laterals següents:

- a) $\lim_{2^-} \frac{x-2}{|x-2|}$; $\lim_{2^+} \frac{x-2}{|x-2|}$
 b) $\lim_{0^-} \frac{2x \sin(x)}{|x|}$; $\lim_{0^+} \frac{2x \sin(x)}{|x|}$

06.6. Es consideren les funcions $f(x) = \exp(1/x)$ i $g(x) = \frac{\exp(1/x)}{\exp(1/x) - 1}$. Determineu

els límits laterals a l'origen de les funcions $f(x)$, $\frac{f(x)}{x}$, $g(x)$ i $xg(x)$.

06.7. Calculeu els límits de funcions següents:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) & \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2/3} - 2x^{1/3} + 1}{(x-1)^2} \\
 \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2} \right)^{\frac{1}{x^2 + 2}} & \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin(x)} - \frac{1}{1 - \cos(x)} \right) \\
 \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2} & \text{f)} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} \\
 \text{g)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+ax)(1+bx)} - 1}{x} & \text{h)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/x} + b^{1/x}}{2} \right)^x
 \end{array}$$

06.8. Calculeu les asímptotes (horitzontals, verticals i obliques) de la gràfica de les funcions següents:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1} & \text{b)} \quad f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \\
 \text{c)} \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} & \text{d)} \quad y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 1}}
 \end{array}$$

06.9. Estudieu la continuïtat de les funcions següents:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \quad f(x) = \frac{|x-2| + (x-2)}{(x-2)^2} & \text{b)} \quad f(x) = \frac{|x|}{x} + 4 \\
 \text{c)} \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 0 \\ x-2, & 0 \leq x < 3 \\ \frac{x^2 - x}{6}, & x \geq 3 \end{cases} & \text{d)} \quad f(x) = \begin{cases} E(x), & x < 0 \\ \frac{x^2 - 6}{6}, & 0 \leq x < 6 \\ x-1, & x \geq 6 \end{cases}
 \end{array}$$

06.10. Determineu, si existeixen, els valors dels paràmetres $a, b \in \mathbb{R}$ que fan contínues en el seu camp d'existència les funcions següents:

a)
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$$

b)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$$

06.11. Determineu tots els zeros de les funcions següents:

a) $f(x) = \sin(x) - x + 1$

b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1$

c) $f(x) = x^3 - 3x + 1$