

Tema 5

Sèries numèriques

Objectius

1. Definir sèries amb wxMaxima.
2. Calcular sumes parcials d'una sèrie.
3. Interpretar la definició de suma d'una sèrie.
4. Calcular la suma d'una sèrie geomètrica.
5. Calcular la suma d'una sèrie telescòpica.
6. Aplicació pràctica dels criteris de convergència per a sèries de termes positius.
7. Aplicació pràctica del càlcul del domini d'una sèrie de potències.

Continguts

- 05-1. Definició de sèrie. Exemples.
- 05-2. Sèries de termes positius.
- 05-3. Sèries alternades. Convergència absoluta i convergència condicional.
- 05-4. Sèries de potències.

Referències

- AEM11 ALANINOS PRATS, J; EXTREMERA LIZANA, J; MUÑOZ RIVAS, P. (2011)
Cálculo con wxMaxima.
- APJ11 ALANINOS PRATS, J; APARICIO DEL PRADO, C; EXTREMERA LIZANA, J; MUÑOZ RIVAS, P.; VILLENA MUÑOZ, A.R. (2011)
Prácticas de ordenador con wxMaxima.
- BR09 BRUZÓN GALLEGO, M. DE LOS SANTOS; RAMÍREZ LABRADOR, JOSÉ (2009)
Modelos matemáticos con Maxima
- BU07 DE BURGOS, JUAN (2007)
Cálculo Infinitesimal de una variable (segunda edición).
- ES08 ESTELA CARBONELL, M. ROSA; SAÀ SEOANE, JOEL (2008)
Cálculo con soporte interactivo en moodle.

- ES02 ESTEP, DONALD (2002)
Practical Analysis in one variable
- JB01 JARAUTA BRAGULAT, EUSEBI (2001)
Anàlisi Matemàtica d'una variable. Fonaments i aplicacions.
- RR05 REDONDO NEBLE, M. VICTORIA; RODRÍGUEZ GALVÁN, J. RAFAEL (2005)
Introducción a Maxima
- RR08b RODRÍGUEZ RIOTORTO, MARIO (2008)
Curso intensivo i-MATH de software libre orientado a Ciencias e Ingeniería
- RU80 RUDIN, WALTER (1980)
Principios de Análisis Matemático.
- SP95 SPIVAK, MICHAEL (1995)
Calculus (Càlcul Infinitesimal).
- VR09 VALLEJO RODRÍGUEZ, JOSÉ ANTONIO (2009)
Cálculo diferencial con Maxima

05-1.- Definició de sèrie. Exemples

Els continguts d'aquest apartat es desenvolupen al fitxer **Tema_05-1.wxm**.

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió numèrica, s'anomena suma parcial n -èsima a

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

La successió de sumes parcials $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'anomena **sèrie** associada a la successió $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i s'acostuma a designar $\sum_{n \geq 1} a_n$. Si aquesta successió de sumes parcials, és a dir

la sèrie, és convergent, el seu límit s'anomena **suma de la sèrie** i es designa $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Per definir una sèrie numèrica amb wxMaxima cal fer servir una lletra d'índex diferent en la successió inicial i en la successió de sumes parcials.

Exemple 05-1.1. Vegem la definició d'una sèrie amb wxMaxima. La sèrie numèrica és

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$. Observeu que cal fer servir un índex de suma diferent per a la successió i per a les sumes parcials:

```
(%i1) a[k]:=1/(k^2+1);
```

```
(%o1) a_k := \frac{1}{k^2 + 1}
```

```
(%i2) makelist(a[k], k, 1, 10);
```

```
(%o2) [\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}, \frac{1}{37}, \frac{1}{50}, \frac{1}{65}, \frac{1}{82}, \frac{1}{101}]
```

```
(%i3) S[n]:=sum(a[k], k, 1, n);
```

```
(%o3) S_n := \sum_{k=1}^n a_k
```

Es poden obtenir els primers termes de la successió de sumes parcials:

```
(%i4) makelist(S[n], n, 1, 5);
```

```
(%o4) [\frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{73}{85}, \frac{1983}{2210}]
```

```
(%i5) makelist(S[n], n, 1, 5), numer;
```

```
(%o5) [0.5, 0.7, 0.8, 0.85882352941176, 0.8972850678733]
```

També es poden obtenir termes qualssevol de la successió de sumes parcials:

```
(%i6) 'S[20] = S[20];      'S[20] = S[20], numer;
(%o6) S20 = 
$$\frac{127839875459491159721369}{124364894551971407543105}$$

(%o7) S20 = 1.027941815252917

(%i8) 'S[50] = S[50];      'S[50] = S[50], numer;
(%o8) S50 = 
$$\frac{2985501955349657655368868349886527697468223781558551467442494587447100559735}{2824838418959566753968474610841248359818030181533374734078775452647631957434}$$

(%o9) S50 = 1.056875301366535

(%i10) 'S[100] = S[100];    'S[100] = S[100], numer;
(%o10) S100 = 
$$\frac{783038547070974244933847469729[129 \text{ digits}]391678070358329582695950979153}{734059038271153602151391138846[129 \text{ digits}]489155184000258256242931637125}$$

(%o11) S100 = 1.066724209152409
```

Observi's el poc interès que té la resposta en els casos de les sortides (%o6), (%o8) i (%o10).

La suma de la sèrie no es pot calcular de manera similar al límit d'una successió. Així, si s'escriu en el programa el càlcul del límit s'obté el resultat:

```
(%i12) limit(S[n], n, inf);
(%o12) 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1}$$

```

Es podria pensar que la instrucció a aplicar és la que podria calcular la “suma infinita”, és a dir:

```
(%i13) S=sum(a[k], k, 1, inf);
(%o13) S = 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$$

```

El resultat mostra clarament que això no és així i que el programa no fa cap càlcul. Per tant, caldrà aplicar altres metodologies per calcular la suma d'una sèrie, en el cas en què això sigui possible, és a dir, quan la sèrie és convergent i es coneix una expressió de la seva suma.

La condició necessària de convergència estableix que per a que una sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n$ pugui ser convergent, la successió inicial ha de ser un infinitèsim i en cas de no ser-ho, la sèrie és divergent. Vegem-ne un exemple.

Exemple 05-1.2.- Si es considera la successió amb $a_n = (-1)^n$, es veu immediatament que la successió de sumes parcials no és convergent:

```
(%i1) a[k]:=(-1)^k;                                makelist(a[k], k, 0, 10);
(%o1) a_k := (-1)^k
(%o2) [1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1]
(%i3) S[n]:=sum(a[k], k, 0, n);                    makelist(S[n], n, 1, 10);
(%o3) S_n :=  $\sum_{k=0}^n a_k$ 
(%o4) [0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1]
```

Exemple 05-1.3 (La sèrie geomètrica). Si x és un nombre real qualsevol i es considera la successió de les seves potències d'exponent natural $(x^n)_{n \geq 0} = (1, x, x^2, \dots, x^n, \dots)$, la sèrie associada a aquesta successió s'anomena sèrie geomètrica. Aquesta sèrie és convergent si i només si, es compleix $|x| < 1$ i la suma de la sèrie és $X = \frac{1}{1-x}$.

En efecte:

```
(%i1) a[k]:=x^k;
(%o1) a_k := x^k
(%i2) makelist(a[k], k, 0, 10);
(%o2) [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9, x^10]
(%i3) S[n]:=sum(a[k], k, 0, n);
(%o3) S_n :=  $\sum_{k=0}^n a_k$ 
(%i4) sum(a[k], k, 0, inf)=1/(1-x);
(%o4)  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ 
```

Per exemple, si $x = \frac{1}{2}$ la sèrie geomètrica és convergent:

```
(%i1) a[k]:=(1/2)^k;
```

```
(%o1)  $a_k := \left(\frac{1}{2}\right)^k$ 
```

```
(%i2) makelist(a[k], k, 0, 10);
```

```
(%o2)  $\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}\right]$ 
```

```
(%i3) S[n]:=sum(a[k], k, 0, n);
```

```
(%o3)  $S_n := \sum_{k=0}^n a_k$ 
```

```
(%i4) makelist(S[n], n, 1, 10);
```

```
(%o4)  $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \frac{127}{64}, \frac{255}{128}, \frac{511}{256}, \frac{1023}{512}, \frac{2047}{1024}\right]$ 
```

```
(%i5) sum(a[k], k, 0, inf)=1/(1-1/2);
```

```
(%o5)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$ 
```

Si la suma comença en un nombre $n_0 > 0$, per calcular la suma de la sèrie geomètrica cal “descomptar” els primers n_0 termes; per exemple:

```
(%i6) aa[k]:=(1/2)^k;
```

```
(%o6)  $aa_k := \left(\frac{1}{2}\right)^k$ 
```

```
(%i7) makelist(aa[k], k, 3, 10);
```

```
(%o7)  $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1024}\right]$ 
```

```
(%i8) sum(aa[k], k, 3, inf)=1/(1-1/2)-((1/2)^0+(1/2)^1+(1/2)^2);
```

```
(%o8)  $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4}$ 
```

Exemple 05-1.4 (Sèries telescòpiques). S'anomena sèrie telescòpica a la associada a la successió de diferències d'una successió numèrica, és a dir, la sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n$ si $a_n = b_n - b_{n+1}$. Si la successió (b_n) és convergent, la sèrie telescòpica és convergent i la seva suma és:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b_1 - \lim(b_{n+1})$$

Així, per exemple, la sèrie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ és telescòpica, ja que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Atès que $\lim\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$, la sèrie telescòpica és convergent. Vegem els càlculs amb wxMaxima:

```
(%i1) b[k]:=1/k;
(%o1) b_k := 1/k
(%i2) a[k]:=b[k]-b[k+1];
(%o2) a_k := b_k - b_{k+1}
(%i3) makelist(a[k], k, 1, 10);
(%o3) [1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30, 1/42, 1/56, 1/72, 1/90, 1/110]
(%i4) sum((a[k]), k, 1, inf)=b[1]-limit(b[k], k, inf);
(%o4)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1$ 
```

05-2.- Sèries de termes positius

Una sèrie numèrica $\sum_{n \geq 1} a_n$ es diu de termes positius si es compleix $a_n \geq 0$, per a tot $n \geq 1$. En aquest cas, la successió de sumes parcials és monòtona creixent i, per tant, la sèrie és convergent si la successió de sumes parcials és fitada superiorment.

Els continguts d'aquest apartat es desenvolupen al fitxer **Tema_05-2.wxm**.

Exemple 05-2.1 (La sèrie harmònica). Un exemple molt conegut de sèrie de termes positius és l'anomenada sèrie harmònica $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ que, malgrat que la successió base és un infinitèsim, resulta que és divergent. Vegem alguns càlculs amb wxMaxima:

```
(%i1) a[k]:=1/k; makelist(a[k], k, 1, 10);
```

(%o1) $a_k := \frac{1}{k}$

(%o2) $[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}]$

```
(%i3) A[n]:=sum(a[k], k, 1, n);      makelist(A[n], n, 1, 10);
```

(%o3) $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$

(%o4) $[1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \frac{7129}{2520}, \frac{7381}{2520}]$

Una manera d'obtenir una certa aproximació de la suma, cas de ser finita, és calcular alguns termes amb índex “gran” de la successió de sumes parcials; per exemple:

```
(%i5) A[20];      A[30];      A[40];
```

(%o5) $\frac{55835135}{15519504}$

(%o6) $\frac{9304682830147}{2329089562800}$

(%o7) $\frac{2078178381193813}{485721041551200}$

Aquesta resposta, tal com s'ha vist a l'apartat anterior, no és gens fàcil d'interpretar numèricament; sembla doncs que cal demanar al programa que ens doni la representació decimal d'aquestes sumes parcials. Aprofitem per incrementar sensiblement l'índex:

```
(%i8) A[1000], numer;
      A[10000], numer;
      A[20000], numer;
(%o8) 7.485470860550343
(%o9) 9.787606036044345
(%o10) 10.48072821722932
```

Com que hi ha una diferència significativa entre aquests resultats, en calculem un parell més:

```
(%i11) A[30000], numer;
       A[40000], numer;
(%o11) 10.88618499211992
(%o12) 11.1738628979455
```

Això no dona informació conclouent en aquest cas; només es pot intuir que la suma és cada vegada més gran i que no sembla estabilitzar-se. Més endavant veurem casos en què sí en podrem treure conclusions més precises. Finalment, només ens queda il·lustrar el resultat ja conegut: que la suma de la sèrie harmònica no és finita, és a dir:

```
(%i13) sum(a[k], k, 1, inf)=+inf;
```

$$(\%o13) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Les sèries de termes positius $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ s'anomenen harmòniques generals o de Riemann.

Aquestes sèries són convergents si i només si, es compleix $p > 1$. Per exemple si $p = 2$ resulta:

```
(%i14) aa[k]:=1/k^2;
```

$$(\%o14) aa_k := \frac{1}{k^2}$$

```
(%i15) AA[n]:=sum(aa[k], k, 1, n);          makelist(AA[n], n, 1, 10);
```

$$(\%o15) AA_n := \sum_{k=1}^n aa_k$$

$$(\%o16) \left[1, \frac{5}{4}, \frac{49}{36}, \frac{205}{144}, \frac{5269}{3600}, \frac{5369}{3600}, \frac{266681}{176400}, \frac{1077749}{705600}, \frac{9778141}{6350400}, \frac{1968329}{1270080} \right]$$

```
(%i17) AA[1000], numer;
      AA[10000], numer;
      AA[20000], numer;
(%o17) 1.643934566681561
(%o18) 1.644834071848065
(%o19) 1.644884068098209
```

Per tant, atès que la sèrie és convergent, es pot afirmar que la suma de la sèrie és aproximadament 1.6448 ± 10^{-4} .

Exemple 05-2.2 (Criteri de l'arrel o de Cauchy). Si $\sum_{n \geq 1} a_n$ és una sèrie de termes positius, aquest criteri es basa en el càlcul del límit

$$L_A = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n}$$

Si es compleix $0 \leq L_A < 1$, la sèrie és convergent, si $L_A > 1$ la sèrie és divergent i si val 1 no es pot concloure res per aplicació d'aquest criteri. Considerem la sèrie numèrica

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

La introduïrem al programa wxMaxima i calcularem el límit que estableix el criteri de l'arrel:

```
(%i1) a[k]:=(k/(2*k+1))^(k);          makelist(a[k], k, 1, 7);
(%o1) a_k := \left( \frac{k}{2k+1} \right)^k
(%o2) [1/3, 4/25, 27/343, 256/6561, 3125/161051, 46656/4826809, 823543/170859375]
(%i3) A[n]:=sum(a[k], k, 1, n);      makelist(A[n], n, 1, 5);
(%o3) A_n := \sum_{k=1}^n a_k
(%o4) [1/3, 37/75, 14716/25725, 34379092/56260575, 5712601442567/9060821864325]
```

```
(%i5) A[1],numer;    A[2],numer;    A[3],numer;
      A[4],numer;    A[5],numer;
(%o5) 0.33333333333333
(%o6) 0.49333333333333
(%o7) 0.57205053449951
(%o8) 0.61106897681014
(%o9) 0.63047276815574
(%i10) L1:=limit((a[k])^(1/k), k, inf);
(%o10) L1 =  $\frac{1}{2}$ 
```

Amb aquest resultat es pot concloure que la sèrie és convergent.

Exemple 05-2.3 (Criteri del quocient o de D'Alembert). Si $\sum_{n \geq 1} a_n$ és una sèrie de termes positius, aquest criteri es basa en el càlcul del límit

$$L_Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Si es compleix $0 \leq L_Q < 1$, la sèrie és convergent, si $L_Q > 1$ la sèrie és divergent i si val 1 no es pot concloure res per aplicació d'aquest criteri. Considerem la sèrie numèrica

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

La introduïrem al programa wxMaxima i calcularem el límit que estableix el criteri. Obtenim:

```
(%i1) a[k]:=(k/(2*k+1))^(k);    makelist(a[k], k, 1, 5);
(%o1) a_k :=  $\left( \frac{k}{2k+1} \right)^k$ 
(%o2) [ $\frac{1}{3}, \frac{4}{25}, \frac{27}{343}, \frac{256}{6561}, \frac{3125}{161051}$ ]
(%i3) A[n]:=sum(a[k], k, 1, n);    makelist(A[n], n, 1, 5);
(%o3) A_n :=  $\sum_{k=1}^n a_k$ 
(%o4) [ $\frac{1}{3}, \frac{37}{75}, \frac{14716}{25725}, \frac{34379092}{56260575}, \frac{5712601442567}{9060821864325}$ ]
```

```

(%i5) A[1],numer;      A[2],numer;      A[3],numer;
      A[4],numer;      A[5],numer;
(%o5) 0.33333333333333
(%o6) 0.49333333333333
(%o7) 0.57205053449951
(%o8) 0.61106897681014
(%o9) 0.63047276815574
(%i10) b[k]:=a[k+1]/a[k];      makelist(b[k], k, 1, 5);
(%o10)  $b_k := \frac{a_{k+1}}{a_k}$ 
(%o11)  $\left[\frac{12}{25}, \frac{675}{1372}, \frac{87808}{177147}, \frac{20503125}{41229056}, \frac{7513995456}{15083778125}\right]$ 
(%i12) L2=limit(b[k], k, inf);
(%o12)  $L2 = \frac{1}{2}$ 

```

Per tant, la sèrie és convergent. Observeu que el càlcul d'aquest límit sense l'ajut del programa no és senzill. A títol de comprovació del que s'ha dit sobre aquest criteri, apliquem-lo a les sèries harmòniques vistes a l'Exemple 05-2.1: en el primer cas resulta

```

(%i13) aa[k]:=1/k^2;      c[k]:=aa[k+1]/aa[k];      L3=limit(c[k], k, inf);
(%o13)  $aa_k := \frac{1}{k^2}$ 
(%o14)  $c_k := \frac{aa_{k+1}}{aa_k}$ 
(%o15)  $L3 = 1$ 

```

En el segon cas, resulta:

```

(%i16) aaa[k]:=1/k;      c[k]:=aaa[k+1]/aaa[k];      L4=limit(c[k], k, inf);
(%o16)  $aaa_k := \frac{1}{k}$ 
(%o17)  $c_k := \frac{aaa_{k+1}}{aaa_k}$ 
(%o18)  $L4 = 1$ 

```

Observeu, doncs, que el resultat obtingut és el mateix tot i que les sèries tenen diferent caràcter (la primera és convergent i la segona divergent).

Exemple 05-2.4 (La sèrie exponencial). El nombre e es pot definir com suma d'una sèrie de termes positius:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

La implementació dels càlculs amb wxMaxima és la següent:

```
(%i1) e[k]:=1/k!;
```

$$(\%o1) e_k := \frac{1}{k!}$$

```
(%i2) makelist(e[k], k, 0, 10);
```

$$(\%o2) [1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \frac{1}{5040}, \frac{1}{40320}, \frac{1}{362880}, \frac{1}{3628800}]$$

```
(%i3) E[n]:=sum(e[k], k, 0, n);
```

$$(\%o3) E_n := \sum_{k=0}^n e_k$$

```
(%i4) makelist(E[n], n, 0, 5);
```

$$(\%o4) [1, 2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{65}{24}, \frac{163}{60}]$$

```
(%i5) makelist(E[n], n, 0, 5), numer;
```

$$(\%o5) [1, 2, 2.5, 2.666666666666667, 2.708333333333334, 2.716666666666667]$$

```
(%i6) sum(1/k!, k, 0, inf)=%e;
```

$$(\%o6) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \%e$$

Sabent que la sèrie és convergent, calcularem un parell de sumes “grans” i compararem els resultats:

```
(%i7) n:20;          E[n],numer;          E[n+1],numer;
```

$$(\%o7) 20$$

$$(\%o8) 2.718281828459046$$

$$(\%o9) 2.718281828459046$$

Amb aquesta informació, es pot escriure l'aproximació del nombre e :

$$e = 2.718281828459046 \pm 10^{-14}.$$

05-3.- Sèries alternades. Convergència absoluta i convergència condicional

Els continguts d'aquest apartat es desenvolupen al fitxer **Tema_05-3.wxm**.

Si $a_n \geq 0$, s'anomenen sèries alternades les que tenen la forma

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n \quad ; \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} a_n$$

En wxMaxima es pot veure aquesta definició de la manera següent; de la primera:

```
(%i1) makelist((-1)^k*a[k], k, 1, 6);
(%o1) [-a_1, a_2, -a_3, a_4, -a_5, a_6]

(%i2) S[n]:=sum((-1)^k*a[k], k, 1, n);
      S[1]; S[2]; S[3]; S[4];
```

$$(\%o2) S_n := \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$$

(%o3) $-a_1$

(%o4) $a_2 - a_1$

(%o5) $-a_3 + a_2 - a_1$

(%o6) $a_4 - a_3 + a_2 - a_1$

I ara de la segona:

```
(%i7) makelist((-1)^(k+1)*a[k], k, 1, 6);
(%o7) [a_1, -a_2, a_3, -a_4, a_5, -a_6]

(%i8) T[n]:=sum((-1)^(k+1)*a[k], k, 1, n);
      T[1]; T[2]; T[3]; T[4];
```

$$(\%o8) T_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$$

(%o9) a_1

(%o10) $a_1 - a_2$

(%o11) $a_3 - a_2 + a_1$

(%o12) $-a_4 + a_3 - a_2 + a_1$

En el primer cas, les sumes parcials d'índex parell formen una successió monòtona decreixent i les d'índex senar una successió monòtona creixent. En el segon cas, la situació és justament la contrària. El criteri de convergència que s'aplica en el cas de les sèries alternades és l'anomenat criteri de Leibniz, segons el qual si la successió (a_n) és un infinitèsim i monòtona decreixent, aleshores les sèries alternades definides abans són convergents.

Vegem-ne un exemple.

Exemple 05-3.1. Es consideren la sèrie alternada $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$. Es tracta d'una sèrie convergent, ja que la successió $\left(\frac{1}{n}\right)$ compleix les condicions del criteri de Leibniz. Definim la sèrie amb wxMaxima:

```
(%i1) a[k]:=(-1)^k/k;
(%o1) a_k :=  $\frac{(-1)^k}{k}$ 
(%i2) '(an)=makelist(a[k], k, 1, 10);
(%o2) an = [-1,  $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $-\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $-\frac{1}{7}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $-\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{10}$ ]
(%i3) A[n]:=sum(a[k], k, 1, n);
(%o3) A_n :=  $\sum_{k=1}^n a_k$ 
(%i4) '(An)=makelist(A[n], n, 1, 10);
(%o4) An = [-1,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{5}{6}$ ,  $-\frac{7}{12}$ ,  $-\frac{47}{60}$ ,  $-\frac{37}{60}$ ,  $-\frac{319}{420}$ ,  $-\frac{533}{840}$ ,  $-\frac{1879}{2520}$ ,  $-\frac{1627}{2520}$ ]
```

Ara veiem les primeres sumes parcials d'índex parell i d'índex senar:

```
(%i5) makelist(A[2*n], n, 1, 6);
(%o5) [- $\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{7}{12}$ ,  $-\frac{37}{60}$ ,  $-\frac{533}{840}$ ,  $-\frac{1627}{2520}$ ,  $-\frac{18107}{27720}$ ]
(%i6) makelist(A[2*n-1], n, 1, 6);
(%o6) [-1,  $-\frac{5}{6}$ ,  $-\frac{47}{60}$ ,  $-\frac{319}{420}$ ,  $-\frac{1879}{2520}$ ,  $-\frac{20417}{27720}$ ]
```

Per poder estudiar la monotonia, seria millor tenir els valors numèrics d'aquestes sumes parcials:

```

(%i7) float(A[1]);    float(A[3]);
      float(A[5]);    float(A[7]);
(%o7) -1.0
      (%o8) -0.833333333333333
      (%o9) -0.783333333333333
      (%o10) -0.75952380952381
(%i11) float(A[2]);    float(A[4]);
      float(A[6]);    float(A[8]);
(%o11) -0.5
      (%o12) -0.583333333333333
      (%o13) -0.616666666666667
      (%o14) -0.63452380952381

```

Es pot intuir que les sumes parcials d'índex parell formen una successió monòtona decreixent i les d'índex senar una successió monòtona creixent. Com és conegut, es pot determinar un interval en el qual hi hagi la suma de la sèrie, calculant sumes parcials d'ordre superior.

Començarem per obtenir unes quantes sumes parcials d'índex parell i després unes altres d'índex senar:

```

(%i15) A[100],numer;    A[102],numer;
      A[1000],numer;    A[1002],numer;
(%o15) -0.6881721793102
      (%o16) -0.68826924784058
      (%o17) -0.69264743055982
      (%o18) -0.69264842756681
(%i19) A[101],numer;    A[103],numer;
      A[1001],numer;    A[1003],numer;
(%o19) -0.6980731694092
      (%o20) -0.69797798570466
      (%o21) -0.69364643155882
      (%o22) -0.69364543653989

```

Per tant, es pot afirmar que la suma de la sèrie es troba a l'interval $]-0.693, -0.692[$.

Convergència absoluta.- La convergència absoluta d'una sèrie numèrica $\sum_{n \geq 1} a_n$ fa referència a la convergència de la sèrie de termes positius $\sum_{n \geq 1} |a_n|$, verificant-se que la convergència absoluta implica la convergència (ordinària).

El recíproc no és cert i pot ser que una sèrie $\sum_{n \geq 1} a_n$ sigui convergent i no ho sigui absolutament; en aquest cas es diu que la sèrie és condicionalment convergent. Per exemple, la sèrie estudiada a l'Exemple 05-3.1 és condicionalment convergent.

05-4.- Sèries de potències

Els continguts d'aquest apartat es desenvolupen al fitxer **Tema_05-4.wxm**.

Si (a_n) és una successió numèrica, $x \in \mathbb{R}$ és un nombre real qualsevol i $x_0 \in \mathbb{R}$ és un nombre real fix, s'anomena sèrie de potències centrada en x_0 a la sèrie $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$.

Si $x_0 = 0$ la sèrie $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ s'anomena centrada a l'origen, que acostuma a ser el cas més freqüent.

El caràcter d'una sèrie de potències depèn de la successió (a_n) i del nombre $x \in \mathbb{R}$, de la manera següent: si es designa per $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$ es compleix

- Si $L = 0$ la sèrie és convergent per a tot $x \in \mathbb{R}$;
- Si $L = +\infty$ la sèrie és convergent només si $x = 0$;
- Si $0 < L < +\infty$ la sèrie és absolutament convergent en l'interval $]x_0 - R, x_0 + R[$, essent $R = 1/L$.

El nombre real $R > 0$ s'anomena radi de convergència de la sèrie de potències. En els punts $x = x_0 - R$, $x = x_0 + R$ cal estudiar la convergència de la sèrie numèrica corresponent. El conjunt de punts en els quals la sèrie és convergent s'anomena domini de convergència. Val a dir que en ocasions es pot calcular més fàcilment el límit

$L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$; si aquest límit existeix, aleshores coincideix amb $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$. Definició

d'una sèrie de potències centrada en x_0 amb wxMaxima:

```
(%i1) makelist(a[k], k, 1, 5);
(%o1) [a1, a2, a3, a4, a5]
(%i2) makelist(a[k]*(x-x0)^k, k, 1, 5);
(%o2) [a1 (x-x0), a2 (x-x0)^2, a3 (x-x0)^3, a4 (x-x0)^4, a5 (x-x0)^5]
(%i3) s[k]:=a[k]*(x-x0)^k;
(%o3) s_k := a_k (x-x0)^k
(%i4) S[n]:=sum(s[k], k, 0, n);
(%o4) S_n := \sum_{k=0}^n s_k
```

```
(%i5) S[0];      S[2];      S[4];
(%o5) a_0
(%o6) a_1 (x-x0)+a_2 (x-x0)^2+a_0
(%o7) a_1 (x-x0)+a_4 (x-x0)^4+a_3 (x-x0)^3+a_2 (x-x0)^2+
```

Definició d'una sèrie de potències centrada a l'origen amb wxMaxima:

```
(%i8) makelist(b[k], k, 1, 5);
(%o8) [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]
(%i9) makelist(x^k, k, 1, 5);
(%o9) [x, x^2, x^3, x^4, x^5]
(%i10) t[k]:=b[k]*x^k;
(%o10) t_k := b_k x^k
(%i11) T[n]:=sum(t[k], k, 0, n);
(%o11) T_n := \sum_{k=0}^n t_k
(%i12) T[0];      T[2];      T[4];
(%o12) b_0
(%o13) b_2 x^2+b_1 x+b_0
(%o14) b_4 x^4+b_3 x^3+b_2 x^2+b_1 x+b_0
```

Exemple 05-4.1. Es considera la sèrie de potències $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n$. En primer lloc la definirem amb wxMaxima:

```
(%i1) a[k]:=1/k!;      s[k]:=a[k]*x^k;      makelist(s[k], k, 1, 10);
(%o1) a_k := \frac{1}{k!}
(%o2) s_k := a_k x^k
(%o3) [x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{6}, \frac{x^4}{24}, \frac{x^5}{120}, \frac{x^6}{720}, \frac{x^7}{5040}, \frac{x^8}{40320}, \frac{x^9}{362880}, \frac{x^{10}}{3628800}]
```

```
(%i4) S[n]:=sum(s[k], k, 0, n);
```

```
(%o4) 
$$S_n := \sum_{k=0}^n s_k$$

```

```
(%i5) makelist(S[n], n, 0, 5);
```

```
(%o5) 
$$\left[ 1, x+1, \frac{x^2}{2}+x+1, \frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1, \frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1, \frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1 \right]$$

```

Ara determinarem el seu domini de convergència:

```
(%i6) b[k]:=(a[k])^(1/k);  
'(lim(b[k])) = limit(b[k], k, inf);
```

```
(%o6) 
$$b_k := a_k^{1/k}$$

```

```
(%o7) 
$$\lim(b_k) = 0$$

```

Per tant, la sèrie és absolutament convergent per a tot nombre real (radi de convergència infinit).

Exemple 05-4.2. Es considera la sèrie de potències $\sum_{n \geq 0} n!x^n$. En primer lloc la definirem amb wxMaxima:

```
(%i1) a[k]:=k!; s[k]:=a[k]*x^k;
```

```
(%o1) 
$$a_k := k!$$

```

```
(%o2) 
$$s_k := a_k x^k$$

```

```
(%i3) makelist(s[k], k, 0, 5);
```

```
(%o3) 
$$[1, x, 2x^2, 6x^3, 24x^4, 120x^5]$$

```

```
(%i4) S[n]:=sum(s[k], k, 0, n); S[0]; S[2]; S[4]; S[6];
```

```
(%o4) 
$$S_n := \sum_{k=0}^n s_k$$

```

```
(%o5) 1
```

```
(%o6) 
$$2x^2+x+1$$

```

```
(%o7) 
$$24x^4+6x^3+2x^2+x+1$$

```

```
(%o8) 
$$720x^6+120x^5+24x^4+6x^3+2x^2+x+1$$

```

Ara determinarem el seu domini de convergència:

```

(%i9) b[k]:=(a[k])^(1/k);
      '(lim(b[k])) = L : limit(b[k], k, inf);
(%o9) b_k := a_k^{1/k}
(%o10) lim(b_k) = ∞
(%i11) R=1/L;
(%o11) R = \frac{1}{\infty}

```

Per tant, la sèrie és convergent únicament a l'origen (radi de convergència nul).

Exemple 05-4.3. Es considera la sèrie de potències $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} x^n$:

```

(%i1) a[k]:=1/k;    s[k]:=a[k]*x^k;
(%o1) a_k := \frac{1}{k}
(%o2) s_k := a_k x^k
(%i3) makelist(s[k], k, 1, 10);
(%o3) [x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \frac{x^5}{5}, \frac{x^6}{6}, \frac{x^7}{7}, \frac{x^8}{8}, \frac{x^9}{9}, \frac{x^{10}}{10}]
(%i4) S[n]:=sum(s[k], k, 1, n);
(%o4) S_n := \sum_{k=1}^n s_k
(%i5) makelist(S[n], n, 1, 5);
(%o5) [x, \frac{x^2}{2} + x, \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x, \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x, \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x]

```

Ara determinarem el seu domini de convergència:

```

(%i6) b[k]:=(a[k])^(1/k);
      '(lim(b[k])) = L : limit(b[k], k, inf);
      R=1/L;
(%o6) b_k := a_k^{1/k}
(%o7) lim(b_k) = 1
(%o8) R = 1

```

Per tant, la sèrie és absolutament convergent a l'interval $] -1, 1[$. En els punts $x = -1, x = 1$ les sèries numèriques corresponents són divergents.

Exemple 05-4.4. Es considera la sèrie de potències $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2} x^n$. En primer lloc la definirem amb wxMaxima i finalment determinarem el seu domini de convergència:

```
(%i1) a[k]:=1/k^2;      s[k]:=a[k]*x^k;
(%o1) a_k :=  $\frac{1}{k^2}$ 
(%o2) s_k := a_k x^k
(%i3) makelist(s[k], k, 1, 10);
(%o3) [x,  $\frac{x^2}{4}$ ,  $\frac{x^3}{9}$ ,  $\frac{x^4}{16}$ ,  $\frac{x^5}{25}$ ,  $\frac{x^6}{36}$ ,  $\frac{x^7}{49}$ ,  $\frac{x^8}{64}$ ,  $\frac{x^9}{81}$ ,  $\frac{x^{10}}{100}$ ]
(%i4) S[n]:=sum(s[k], k, 1, n);
(%o4) S_n :=  $\sum_{k=1}^n s_k$ 
(%i5) makelist(S[n], n, 1, 5);
(%o5) [x,  $\frac{x^2}{4} + x$ ,  $\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + x$ ,  $\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + x$ ,  $\frac{x^5}{25} + \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} + x$ ]
(%i6) b[k]:=(a[k])^(1/k);
      '(lim(b[k])) = L : limit(b[k], k, inf);
      R=1/L;
(%o6) b_k := a_k^{1/k}
(%o7) lim(b_k) = 1
(%o8) R = 1
```

Per tant, la sèrie és absolutament convergent a l'interval $] -1, 1[$. En els punts $x = -1, x = 1$ les sèries numèriques corresponents són convergents. En definitiva, el domini de convergència de la sèrie és l'interval $[-1, 1]$.