

Tema 5

Exercicis resolts

05.1. Calculeu el terme n -èsim de la successió (a_n) tal que si $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ aleshores:

a) $A_n = \frac{1}{n}$ b) $A_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ c) $A_n = \frac{1}{n^2 + n}$

05.2. Es considera la sèrie numèrica definida per

$$\sum_{n \geq 2} \frac{6}{4n^2 + 8n + 3}.$$

Raoneu que es tracta d'una sèrie numèrica telescòpica i calculeu la seva suma.

05.3. Estudieu la convergència i, quan sigui possible, calculeu la suma de les sèries numèriques següents:

a) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-2)^n + 4^n}{(7.25)^n}$ b) $\sum_{n \geq 1} \frac{2.32}{2.43n^2 + 2.43n}$ c) $\sum_{n \geq 1} \frac{3.25n}{(n+1)!}$

05.4. Estudieu la convergència i, si s'escau, calculeu la suma de la sèrie numèrica definida per

$$\sum_{n \geq 1} \log \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

05.5. Estudieu la convergència de les sèries numèriques següents, en funció del nombre real x :

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n^2 + 1)x^n}{4^n}$ b) $\sum_{n \geq 1} \frac{3n^2 + 3n + x^n}{3x^{n+1}n(n+1)} \quad (x > 0)$

05.6. Calculeu el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\log(n)}$$

Tenint en compte el límit anterior, estudeu la convergència de la sèrie numèrica

$$\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

05.7. Es considera la sèrie numèrica:

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} 2^n$$

Definiu-la amb wxMaxima i calculeu les 10 primeres sumes parcials. Determineu un interval on es trobi la suma de la sèrie. Nota: feu servir la comanda “product” (vegeu-la a l’ajut del programa).

05.8. Estudieu la convergència i, si s’escau, calculeu la suma de la sèrie numèrica definida per

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!(n+2)}$$

05.9. Es consideren les sèries alternades:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{2.3n^2 + 1.45} \qquad \text{b) } \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(2.1)^n - 3.24}{n!}$$

Raoneu que es tracta de sèries convergents i determineu un interval d’amplitud inferior a 1 centèsima en el qual es trobi la suma de la sèrie.

05.10. Calculeu el radi de convergència i determineu el domini de convergència de les sèries de potències:

$$\text{a) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{e^n}\right) (x-1)^n \qquad \text{b) } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{3^n}\right) (x-2)^n$$

En el cas b), calculeu la suma de la sèrie en el punt $x_0 = 4$.