

Tema 4

Exercicis resolts

04.1. Demostreu que les següents successions definides per recurrència són convergents i calculeu el seu límit:

a) $a_1 = \sqrt{2}; a_n = \sqrt{2a_{n-1}}, n \geq 2$

b) $a_1 = 3, a_n = \frac{5+a_{n-1}}{2}, n \geq 2$

04.2. Demostreu les propietats següents:

a) Si $a > 0$, aleshores $\lim(a^{1/n}) = 1$

b) Si $|a| < 1$, aleshores $\lim(a^n) = 0$

c) $\lim(n^{1/n}) = 1$

04.3. Calculeu el límit de les successions de nombres reals següents:

a) $\frac{\sin(n)}{n}$

b) $\frac{n!}{n^n}$

c) $\frac{1}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n}}$

d) $\frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

e) $\log\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^n$

f) $\left(\frac{n+2}{2n}\right)^{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$

g) $\left(\frac{n^2 + an + 1}{n^2}\right)^n$

h) $\frac{\log(e^n + e^{-n})}{n}$

04.4. Es considera la successió de nombres reals (a_n) definida per:

$$a_n = \frac{2n^2}{n+1}, \quad n \geq 1$$

- a) Calculeu el límit: $L_1 = \lim (a_{n+1} - a_n)$.
- b) Calculeu el límit: $L_2 = \lim \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n^2} \right)$.

04.5. Es considera la successió de nombres reals $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Es demana:

- a) Estudieu la monotonia de la successió.
- b) Demostreu que la successió és fitada.
- c) Deduïu raonadament dels apartats anteriors que la successió és convergent.
- d) Doneu un interval d'amplitud menor que 0.1 dins el qual es trobi el límit de la successió.

04.6. Es consideren les successions de nombres reals (a_n) i (b_n) definides per:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad n \geq 1 \quad ; \quad b_n = \log(n), \quad n \geq 2$$

- a) Estudieu l'existència i, si s'escau, calculeu el valor del límit: $\lim \frac{a_n}{b_n}$.
- b) A partir d'aquest resultat, digueu quina conclusió es pot afirmar sobre la successió (a_n) .

04.7. Es considera la successió numèrica (x_n) definida per

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+6}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}, \quad \forall n \geq 1$$

Demostreu que la successió (x_n) és fitada superiorment i inferiorment per successions convergents i del mateix límit. Deduïu la convergència de (x_n) i el valor de $\lim(x_n)$.

04.8. Calculeu el límit de la successió $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida per:

$$a_n = \frac{1}{n^2} \left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \cdots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right).$$

04.9. Si $a, b > 0$, es consideren les successions de nombres reals $(x_n), (y_n)$ definides per

$$x_n = \left(\frac{n+a}{n+2} \right)^{an+b} ; \quad y_n = \left(\frac{n+b}{n+1} \right)^{2n+a}$$

Determineu la relació entre els nombres a, b per a que es compleixi que $\lim(x_n) = \lim(y_n)$.

04.10. Es considera la successió de Fibonacci (f_n) definida per:

$$\begin{cases} f_1 = 1, & f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, & \forall n \geq 3 \end{cases}$$

Els termes d'aquesta successió s'anomenen nombres de Fibonacci. Es demana:

a) Demostreu per inducció que es compleix

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

b) Si es considera la successió (R_n) construïda mitjançant el quocient de dos nombres de Fibonacci consecutius, és a dir, definida per:

$$R_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

raoneu que és una successió convergent i demostreu que el seu límit és $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (aquest nombre es coneix com raó àuria o nombre auri).

c) Demostreu que la raó àuria s'obté també en la divisió d'un segment en dues parts de manera que el quocient entre la part més llarga i la part més curta és igual al quocient entre la longitud del segment, és a dir la suma de les dues parts, i la part més llarga.