

Tema 3

Exercicis resolts

03.1. Demostreu que si $x \leq y$ i $a < 0$, aleshores es compleix $xa \geq ya$.

03.2. Si $x, y \in \mathbb{R}$ són nombres reals no nuls tals que $x < y$, estudeu la relació de desigualtat que hi ha entre els seus inversos $\frac{1}{x}, \frac{1}{y} \in \mathbb{R}$.

03.3. Demostreu que si $a \in \mathbb{R}$ és tal que $a^2 < a$, aleshores ha de ser $0 < a < 1$.

03.4. Demostreu que si $a \in \mathbb{R}$ és tal que $a > 0$, aleshores es compleix $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

03.5. Demostreu que si $a, b \in \mathbb{R}$ són tals que $a < b$ i $b > 0$, aleshores es compleix

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

03.6. Demostreu que si $a, b \in \mathbb{R}$ són tals que $a, b \geq 0$, aleshores es compleix

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

03.7. Demostreu que si $a, b \in \mathbb{R}$ i $A = \{a, b\}$, aleshores es compleix

$$\max(A) = \frac{a+b+|a-b|}{2} ; \quad \min(A) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

03.8. Determineu els intervals de la recta real que corresponen als subconjunts següents:

a) $|x-1|+|x+3|=4$ b) $|x-1|+|x+5|=6$
c) $|x-1|+|x-2|=1$ d) $|x+5|+|x|=5$

03.9. Determineu els intervals de la recta real que corresponen als subconjunts següents:

a) $|2x+7|\geq 3$ b) $|x+1|<4$
c) $|x-1|+|x+2|<2$ d) $|x-1|+|x+2|\leq|x-3|$

03.10. Determineu els intervals de la recta real que corresponen als subconjunts següents:

a) $\left|\frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}\right|<1$ b) $\left|\frac{x^2-4x+2}{(x+2)^2}\right|<1$

03.11. Calculeu:

a) $\frac{3}{i}+\frac{2i}{2+i}+\frac{2+3i}{1+2i}$

b) els nombres $a, b \in \mathbb{R}$ sabent que $(-5+ai)(b+19i)=3+2i$

c) el nombre $a \in \mathbb{R}$ sabent que $\frac{3-2ai}{4-3i}$ està situat a la bisectriu del primer quadrant

03.12. Efectueu les operacions:

a) $\frac{2-3i}{(2+3i)(1+i)}-\frac{3+i}{4(2-i)}$ b) $(1-2i)^{32}$ c) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{12}$

03.13. Expressen en forma polar:

a) $1+2i$ b) $5+6i$
c) $1.32+5.67i$ d) $(5+6i)^3$

03.14. Calculeu $x \in \mathbb{R}$ tal que el complex $z = \frac{2+xi}{3-xi}$ sigui imaginari pur i calculeu el quocient.

03.15. Expressen en forma binòmica:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 3 \cdot \exp\left(i \cdot \frac{\pi}{3}\right) \\ \text{b)} & \sqrt{2} \cdot \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{d)} & 4.62 \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{e)} & 5.64 \cdot \exp\left(i \frac{5\pi}{3}\right) \end{array}$$

03.16. Calculeu:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \sqrt[3]{1+2i} & \text{b)} & \sqrt[4]{5+6i} & \text{c)} & \sqrt[5]{2+i} \\ \text{d)} & \sqrt[3]{1.42+2.41i} & \text{e)} & \sqrt[5]{1-\sqrt{3}i} & \text{f)} & \frac{\sqrt[3]{-1+i}}{\sqrt{1+\sqrt{3}i}} \end{array}$$

03.17. Determineu els nombres complexos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sabent que el seu quocient és 3, que la suma dels seus arguments és $\pi/3$ i que la suma dels seus mòduls és 8.

03.18. Un nombre complex $z \in \mathbb{C}$ és tal que una de les seves arrels cúbiques és $3i$. Calculeu aquest nombre complex i les altres arrels cúbiques.

03.19. Determineu els complexos $z \in \mathbb{C}$ tals que:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & z^3 + (1-3i)z^2 + (3+i)z + i = 0 \\ \text{b)} & z^4 + z^2 + 1 = 0 \\ \text{c)} & z^3 - iz + (-1+i) = 0 \\ \text{d)} & z^3 + (1+i)z^2 + (-2+i)z - 2i = 0 \end{array}$$

03.20. Determineu el conjunt dels nombres complexos $z \in \mathbb{C}$ tals que:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & |3z+4| = 1 \\ \text{b)} & \frac{|z-2i|}{|z+2i|} = 4 \\ \text{d)} & |3z+1| - |3z| \geq 0 \\ \text{e)} & \Re\left(\frac{3}{z}\right) + \Im\left(\frac{4}{z}\right) < 2 \end{array}$$