

Tema 12

Exercicis resolts

12.1. Verifiqueu si les funcions que es donen són solucions respectives de les equacions diferencials amb les condicions inicials que eventualment s'indiquen:

- a) $y = e^{-t} + t - 1$, $y' + y = t$, $y(0) = 0$;
- b) $y = 8 \cos(3t) + 6 \sin(3t)$, $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 18$
- c) $27y^2 - 8t^3 = 0$, $(y')^3 - y = 0$, $y(0) = 0$
- d) $y = Ax^3 + Bx^{-4} - \frac{x^2}{3}$, $x^2y'' + 2xy' - 12y - 2x^2 = 0$
- e) $xy^2 - y^3 - C = 0$, $y + (2x - 3y)y' = 0$

12.2. Trobeu l'equació diferencial corresponent a cada una de les famílies de corbes planes indicades:

- a) $y = x + Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$
- b) $x^2 - ay^2 = 1$, $a \in \mathbb{R}$
- c) $y = e^{A+x}$, $A \in \mathbb{R}$
- d) $y = A + Bx^2$, $A, B \in \mathbb{R}$

12.3. Determineu l'equació diferencial de les famílies de corbes planes definides per les condicions que s'indiquen:

- a) Circumferències de radi unitat el centre de les quals està a la bisectriu del primer quadrant.
- b) Circumferències de radi R el centre de les quals està a la bisectriu del primer quadrant.

- c) Circumferències de radi 2 el centre de les quals està a la recta $x = 1$.
- d) Rectes que estan a distància unitat de l'origen.

12.4. Determineu la solució general de les equacions diferencials següents:

- a) $(1 + e^x)yy' = e^x$
- b) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$
- c) $1 + 2y = (x^2 - 4)y'$

12.5. Determineu la solució general de les equacions diferencials següents:

- a) $y' + 2ty - 4t = 0$
- b) $xy' - y - x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
- c) $x' - \frac{1}{t-2}x = 2(t-2)^2$
- d) $y' + \frac{1}{t \log(t)}y = \frac{1}{t}$

12.6. Determineu la solució general de les equacions diferencials següents:

- a) $y' - y - xy^5 = 0$
- b) $x' + 2tx + tx^4 = 0$
- c) $x' + x - x^2(\cos(t) - \sin(t)) = 0$

12.7. Determineu la solució general de les equacions diferencials següents:

- a) $y' = -2 - y + y^2$ sabent que $f_1(x) = 2$ és solució particular;
- b) $y' = 2x^2 + \frac{1}{x}y - 2y^2$ sabent que $f_1(x) = x$ és solució particular;

12.8. En un cultiu de llevat, la quantitat de ferment actiu creix a una velocitat proporcional a la quantitat present. Si en una hora es duplica la quantitat, quantes vegades es pot esperar que es tingui la quantitat original passats 165 minuts?

12.9. Una substància radioactiva es descompon a una velocitat proporcional a la quantitat de substància present. Si la meitat de la quantitat inicial desapareix en 1600 anys, trobeu el percentatge de pèrdua en 100 anys.

12.10. La *llei de Newton* afirma que si es té un cos a una temperatura T i la temperatura del medi ambient T_{amb} és menor que T , la velocitat de refredament del cos és proporcional a la diferència $T - T_{\text{amb}}$. Si la temperatura ambient és $T_{\text{amb}} = 15.4^{\circ}\text{C}$ i el cos es refreda en 30 minuts des de 95.6°C a 57.4°C , calculeu el temps que trigarà a refredar-se fins a 25.1°C . Calculeu la temperatura del cos després de 120 minuts d'haver-se iniciat el procés de refredament.

12.11. La població d'un país era en un cert moment de 100 milions d'habitants. La seva velocitat de creixement era en aquell moment tal que, suposant que en tot instant és proporcional a la població existent, la població s'hauria doblat en 50 anys. Investigacions posteriors varen posar de manifest que la hipòtesi més adequada sobre el creixement de la població era que havia de ser proporcional en cada instant, no solament a la població existent, sinó també a la diferència entre aquesta població i una altra població màxima que es va estimar en 300 milions. Acceptada aquesta llei, determineu en quant temps trigarà en doblar-se aquesta població.

12.12. Un producte químic es dissol en aigua a una velocitat proporcional al producte entre la quantitat que encara no s'ha dissolt i la diferència entre la concentració de saturació i la concentració actual. Se sap que en 100 g d'una dissolució saturada hi ha dissolts 50 g de la substància. Si es dissolen 30 g del producte en 100 g d'aigua s'observa que en 2h s'han dissolt 10 g. Quina quantitat de substància s'haurà dissolt en 5h ?

12.13. Una bala s'introdueix en un tauló de fusta de 10cm de gruix. La velocitat d'entrada és 200m/s i la de sortida de 80m/s. Suposant que la resistència del tauló al moviment de la bala és proporcional al quadrat de la velocitat, calculeu el temps que tarda la bala en travessar el tauló. Feu una representació gràfica de la variació de la velocitat de la bala en el seu moviment.

12.14. Es vol renovar en 10 minuts l'aire d'una aula que conté el 0.12% del seu volum de diòxid de carboni (CO_2) i fer arribar la concentració al 0.06%. Les dimensions de l'aula són $12 \times 8 \times 4$ metres. Calculeu el cabal (m^3/min) que cal dimensionar per a aquesta renovació, sabent que l'aire de l'ambient conté el 0.04% del seu volum de diòxid de carboni. Feu una representació gràfica de l'evolució de la concentració de diòxid de carboni en funció del temps. (Suposeu que en tot moment la concentració de diòxid a l'aula és homogènia).

12.15. Calculeu la solució general de les equacions diferencials següents:

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| a) $y'' - y' - 2y = 0$ | b) $y'' + y' - 6y = 0$ |
| c) $y'' + 6y' + 9y = 0$ | d) $y'' + 9y = 0$ |

12.16. Calculeu la solució general de les equacions diferencials següents:

- a) $y'' - y' - 2y = t$
- b) $y'' + y' - 6y = 1 + t$
- c) $y'' - 3y' + 2y = e^{5t}$
- d) $y'' + 9y = t \cos(t)$
- e) $y'' + 4y = \cos(2t) + \sin(2t)$

12.17. Es penja una massa de 10kg d'una molla i aleshores s'observa un desplaçament de 70cm respecte de la posició inicial. Tot seguit la massa es posa en moviment des de la posició d'equilibri amb una velocitat ascendent de 1m/s. Calculeu la posició de la massa en funció del temps sabent que l'aire exerceix una resistència proporcional a la velocitat amb constant de proporcionalitat de 90N.

12.18. Es penja una massa de 10kg d'una molla que té una constant de 140N/m. La massa es posa en moviment des de la posició d'equilibri amb una velocitat ascendent de 1m/s i aplicant una força externa de valor $5\sin(t)$. Calculeu la posició de la massa en funció del temps sabent que l'aire exerceix una resistència proporcional a la velocitat amb constant de proporcionalitat de 90N.

12.19. Un circuit RLC en sèrie està format una resistència òhmica $R=180\Omega$, un condensador de capacitat $C=1/280$ farad, una bobina de coeficient d'autoinducció $L=20H$ i una font de força electromotriu $E(t)=10\sin(t)$. Suposant que no hi ha càrrega inicial al condensador, que el corrent elèctric inicial és $I(0) = 1A$, calculeu la càrrega del condensador en funció del temps.

12.20. Aplicant el mètode de Runge-Kutta de wxMaxima, resoleu numèricament les equacions diferencials següents:

- a) $y' = \sqrt{y+t}$; en $[0,10]$, amb la condició inicial $y(0) = 0$; $h = 0.5$, $h = 0.2$;
- b) $y' = (t+y-1)^2$; en $[0,0.5]$, amb la condició inicial $y(0) = 2$; $h = 0.05$, $h = 0.01$;
- c) $y' = -\log(y+t-2)$; en $[0,10]$, amb la condició inicial $y(0) = 5$; $h = 0.5$, $h = 0.2$.

Verifiqueu que el programa no permet obtenir analíticament la solució i feu una representació gràfica de cada aproximació numèrica.