

Tema 11

Exercicis resolts

11.1. Es considera la funció $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$f(x, y) = (\sin(x + y^3), \cos(x) - e^y).$$

Raoneu que la funció és localment invertible en un entorn del punt $(0,0)$ i calculeu $Jf^{-1}(0,0)$.

11.2. Es considera la funció $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$f(x, y) = (e^{2x} - e^y, e^y).$$

- 1) Demostreu que la funció és localment invertible en un entorn $U(x, y)$ de cada punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- 2) Calculeu l'expressió analítica de la funció inversa definida en $V(u, v) = f(U(x, y))$.
- 3) Comproveu que les matrius jacobianes de f en (x, y) i de f^{-1} en $(u, v) = f(x, y)$ són inverses.

11.3. Es considera la funció $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida per

$$f(x, y) = \left(\frac{x^4 + y^4}{x}, \sin(x) + \cos(x) \right), \quad (x, y) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

- a) Raoneu la diferenciabilitat de f en A .
- b) Determineu els punts del domini de la funció en la qual aquesta és localment invertible.
- c) Calculeu l'aproximació lineal de la funció inversa f^{-1} en un entorn del punt $f(\pi, \pi)$.

11.4. Es considera l'equació $x^2y + 4x^4y^3 - 5 = 0$. Estudieu si aquesta equació defineix localment una funció $y = y(x)$ en un entorn del punt $(1,1)$. En cas afirmatiu, calculeu les derivades de primer i segon ordre d'aquesta funció en el punt $a = 1$.

11.5. Es considera l'equació $x + 2y + z + 3\cos(xyz) = 0$. Estudieu si aquesta equació defineix localment una funció $z = z(x, y)$ en un entorn del punt $(0, 0, -3)$. En cas afirmatiu, calculeu les derivades parcials $D_x z(0, 0)$, $D_y z(0, 0)$.

11.6. Es considera el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x - u^2 - v^2 = 0 \\ y - 2uv = 0 \end{cases}$$

i el punt $P(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, 2, 1, 1)$. Es demana:

- 1) Determineu el sistema lineal que aproxima el sistema donat en un entorn del punt P .
- 2) Demostreu que el sistema donat defineix en un entorn del punt P dues funcions implícites diferenciables $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ tals que $u(0, 2) = 1, v(0, 2) = 1$.
- 3) Calculeu les derivades parcials $D_x u(0, 2), D_y u(0, 2), D_x v(0, 2), D_y v(0, 2)$.

11.7. Es considera l'equació

$$xyz + \sin(z - 2) - x^2y^2 - x - y + 1 = 0 \quad [1]$$

- 1) Calculeu una aproximació lineal d'aquesta equació en un entorn del punt $P(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$.
- 2) Calculeu el pla tangent i la recta normal a la superfície definida per [1] en el punt P .
- 3) Demostreu que l'equació [1] defineix implícitament una funció $z = z(x, y)$ en un entorn de P i calculeu una aproximació lineal d'aquesta funció en un entorn del punt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

11.8. Es considera el sistema d'equacions

$$\begin{cases} x^3z + y^3u^2 - 1 = 0 \\ xy^2 + 2zu^3 = 0 \end{cases}$$

i el punt $P(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$. Es demana:

- 1) Determineu el sistema lineal que aproxima el sistema donat en un entorn del punt P .
- 2) Demostreu que el sistema donat defineix en un entorn del punt P dues funcions implícites diferenciables $z = z(x, y)$, $u = u(x, y)$ tals que $z(0, 1) = 0, u(0, 1) = 1$.
- 3) Calculeu les derivades parcials $D_x z(0, 1), D_x u(0, 1), D_y z(0, 1), D_y u(0, 1)$.
- 4) Si es designa per $\varphi(x, y) = (z(x, y), u(x, y))$ demostreu que la funció φ és localment invertible en un entorn del punt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ i calculeu $J\varphi^{-1}(0, 1)$.

11.9. Es consideren les funcions $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definides per

$$f(x, y) = e^x + e^y, (x, y) \in A; \quad g(t) = (t^2, \log(t)), t \in B$$

- a) Raoneu la diferenciabilitat d'aquestes funcions i calculeu el seu respectiu camp de diferenciabilitat. Calculeu les matrius jacobianes $Jf(x, y)$ i $Jg(t)$.
- b) Raoneu la diferenciabilitat de les funcions compostes $F = g \circ f, G = f \circ g$ i determineu el seu respectiu camp de diferenciabilitat. Calculeu les matrius jacobianes d'aquestes funcions compostes en un punt qualsevol del seu camp de diferenciabilitat. Calculeu $JF(1, 0), JG(1)$.
- c) Verifiqueu que la funció G és invertible en un entorn de $t=1$ i calculeu l'aproximació lineal de la seva funció inversa en un entorn del punt $G(1)$.

11.10. Calculeu el polinomi de Taylor de grau 2 de les següents funcions en el punt indicat:

$f(x, y) = x^3 + y^2 + xy^2$	$P = (1, 2)$
$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$	$P = (0, 0)$
$f(x, y, z) = \exp(x + y + z)$	$P = (0, 0, 0)$

11.11. Calculeu el polinomi de Taylor de graus 2, 3 i 4 de la funció $f(x, y) = e^x \cos(y)$ en $(0, 0)$.

11.12. Es considera l'equació

$$x \sin\left(\frac{\pi}{y}\right) - z^2 y + 1 = 0$$

- a) Demostreu que aquesta equació defineix una funció implícita diferenciable $z = z(x, y)$ en un entorn del punt $P(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, -1)$.
- b) Calculeu el pla tangent i la recta normal a la superfície $z = z(x, y)$ en el punt P .
- c) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 1 de la funció $z(x, y)$ en el punt $(1, 2)$.
- d) Calculeu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $z(x, y)$ en el punt $(1, 2)$.

11.13. Determineu els punts estacionaris i estudeu els extrems locals i punts de sella, si existeixen, de les funcions:

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 3 \quad \text{b) } f(x, y) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2$$

Feu una representació gràfica de cada funció en un entorn adequat dels punts estacionaris.

11.14. Es considera la funció real de dues variables $f(x, y) = x^3 + 3y^3 - x^2 + y^2$. Calculeu la funció que estableix la derivada direccional d'aquesta funció en un punt (x, y) en la direcció definida pel vector $\vec{u} = (1, 2)$. Estudieu els extrems d'aquesta funció, és a dir, determineu el punt en el qual aquesta derivada direccional assoleix un extrem i determineu el tipus d'extrem.

11.15. Es considera l'equació

$$xyz + \sin(z - 3) - x^2 y^2 - x - y = 0.$$

Demostreu que aquesta equació defineix localment una funció $z = z(x, y)$ en un entorn del punt $(1, 1, 3)$. Estudieu l'existència d'un extrem local de la funció $z = z(x, y)$ en el punt $(1, 1)$ i classifiqueu-lo.

11.16. Raoneu l'existència i calculeu, quan existeixin, els extrems absoluts de les següents funcions en el conjunt A que s'indica:

- | | |
|--------------------------|--|
| a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ | A : segment $\{x + y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$ |
| b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ | A : regió del pla $\{x^2 + y - 1 \leq 0, y \geq 0\}$ |
| c) $f(x, y) = x + y$ | A : regió del pla $\{x^2 + y^2 - 1 \leq 0, y \geq 0\}$ |

11.17. Determineu el paral·lelepípede rectangular de volum màxim contingut en el primer octant amb un vèrtex a l'origen i el vèrtex oposat en el pla d'equació $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

11.18. Un pentàgon està construït amb un rectangle i un triangle isòsceles que té la base sobre un dels costats del rectangle. Els costats iguals del triangle tenen una longitud doble de la base del rectangle, sobre la qual s'ha construït el triangle. Sabent que el perímetre del pentàgon té un valor constant P , determineu les dimensions del pentàgon que té àrea màxima. Feu una representació gràfica de l'àrea del pentàgon suposant que $P = 100\text{cm}$.

11.19. Es considera l'el·lipse d'equació $4x^2 + 5xy + 4y^2 - 8 = 0$. Calculeu els punts d'aquesta corba que tenen distància màxima i distància mínima a l'origen de coordenades.

11.20. Una llauna de refresc estàndard té una capacitat de 330 cl. Calculeu les dimensions de la llauna per tal que requereixi la mínima quantitat de material en la seva fabricació. Feu una representació gràfica per il·lustrar la solució del problema.