

Tema 10

Exercicis resoltos

10.1. Determineu el camp d'existència de les funcions següents:

a) $f(x, y) = \log\left(\frac{x-1}{y+2}\right)$

b) $f(x, y) = \frac{x+2y}{\sqrt{2y-x}}$

c) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = \log(y - 3x^2)$

10.2. Calculeu els límits de les següents funcions reals de dues variables:

a) $\lim_{(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$

b) $\lim_{(0,0)} \frac{-xy^2}{x^2 + y^4}$

c) $\lim_{(1,0)} \frac{\sin((x-1)y)}{3y}$

d) $\lim_{(0,0)} 2xy \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$

10.3. Calculeu els límits:

a) $\lim_{(0,1)} \frac{e^{x/2y} - 1}{x}$

b) $\lim_{(0,0)} \frac{\log(xy+1)}{x^2 + y^2}$

c) $\lim_{(0,0)} \left(1 + \sin(x^2 y)\right)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$

d) $\lim_{(0,0)} (2 + xy)^{\frac{-1}{x^2 y^2}}$

10.4. Calculeu els límits següents:

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(e^{xy} - 1) \sin \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \quad \text{b) } \lim_{(0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

10.5. Calculeu les derivades parcials de primer ordre de les següents funcions reals de dues variables:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = x^4 + 3x^2 - 4xy & \text{b) } f(x, y) = 4xy + \frac{x}{2y} - \sqrt{x^2 + 3y^2} \\ \text{c) } f(x, y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2x}\right) & \text{d) } f(x, y) = \log\left(\frac{x+2}{3\sqrt{y}}\right) \end{array}$$

10.6. Calculeu les derivades parcials a l'origen de les següents funcions reals de dues variables:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 / 2y, & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases} & \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ \text{c) } f(x, y) = \begin{cases} (3y+1)x, & \text{si } y \geq 0 \\ x - x^2 - y^2, & \text{si } y < 0 \end{cases} & \text{d) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin(xy), & \text{si } x \neq 0 \\ y, & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

10.7. Estudieu la diferenciabilitat de les següents funcions reals de dues variables i calculeu la seva matriu jacobiana en un punt qualsevol en el qual la funció sigui diferenciable:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = x^4 + 3x^2 - 4xy & \text{b) } f(x, y) = 4xy + \frac{x}{2y} - \sqrt{x^2 + 3y^2} \\ \text{c) } f(x, y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2x}\right) & \text{d) } f(x, y) = x^2 y + \sin(xy) \end{array}$$

10.8. Calculeu la derivada direccional de les següents funcions reals de dues variables en el punt i segons la direcció del vector que s'indica:

$$\begin{array}{l} \text{a) } f(x, y) = \log \sqrt{2x^2 + 3y^2} \text{ , } a = (1, 2); \vec{u} = (2, -1) \\ \text{b) } f(x, y) = x^4 + 3x^2 - 4xy \text{ , } a = (1, -3); \vec{u} = (-2, -1) \\ \text{c) } f(x, y) = x^4 + \exp(3x^2 - 4xy) \text{ , } a = (2, 3); \vec{u} = (-3, -2) \end{array}$$

10.9. Es considera la funció real de dues variables definida per:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy}, & \text{si } xy \neq 0 \\ x + y, & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

a) Calculeu les derivades parcials a l'origen i raoneu l'existència del vector gradient a l'origen i calculeu-lo, si s'escau. b) Raoneu si és certa l'afirmació: per a qualsevol vector unitari $\vec{u} = (u_1, u_2)$, es verifica la igualtat $D_{\vec{u}}f(0,0) = u_1 + u_2$.

10.10. Es considera un rectangle de base a i altura b . Aplicant el concepte de diferencial d'una funció, calculeu aproximadament quina és la variació de la diagonal del rectangle si la base s'allarga Δa i l'altura s'escurça Δb . Compareu aquesta aproximació amb el càlcul del valor exacte. Feu els càlculs en el cas concret següent: $a = 15\text{cm}$, $b = 7\text{ cm}$, $\Delta a = 2\text{mm}$, $\Delta b = -1\text{mm}$.

10.11. Demostreu que l'error relatiu que es comet en el càlcul del producte de dos factors es pot aproximar per la suma de l'error relatiu comés en el càlcul de cada un dels factors.

10.12. Calculeu l'equació del pla tangent i de la recta normal a les superfícies següents en el punt que s'indica:

a) $z = x^4 + 3x^2 - 4xy$, $P = (1, 0, 4)$

b) $z = 2 \sin(xy)$, $P = (1, \pi, 0)$

c) $z = 1 + y + \log\left(\frac{x}{y}\right)$, $P = (1, 1, 2)$

10.13. Calculeu la derivada de la funció $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ en el punt $(1,2)$ al llarg de la corba $r(t) = (t, 2t^2)$.

10.14. Calculeu les derivades parcials de segon i tercer ordre de les següents funcions reals de dues variables:

a) $f(x, y) = x^4 + 3x^2 - 4xy$

b) $f(x, y) = 4xy + \frac{x}{2y} - \sqrt{x^2 + 3y^2}$

$$\text{c) } f(x, y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2x}\right) \qquad \text{d) } f(x, y) = \log\left(\frac{x+2}{3\sqrt{y}}\right)$$

10.15. Calculeu les derivades parcials de primer ordre de les següents funcions reals de tres variables:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y, z) = x^4 + 3x^2z^2 - 4xyz & \text{b) } f(x, y, z) = 4xye^z + \frac{x}{2y} - \sqrt{x^2z + 3y^2} \\ \text{c) } f(x, y, z) = \exp\left(-\frac{y^2}{2x}\right) + \sin(xz) & \text{d) } f(x, y, z) = \log\left(\frac{x+2z^2}{3z\sqrt{y}}\right) \end{array}$$

10.16. Calculeu l'equació del pla tangent i de la recta normal a les superfícies següents en el punt que s'indica:

$$\text{a) } x^2y^2 + xz - 2y^3 - 10 = 0, \quad P = (2, 1, 4)$$

$$\text{b) } x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0, \quad P = (2, 1, -2)$$

10.17. Calculeu les derivades parcials de segon i tercer ordre de les següents funcions reals de tres variables:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y, z) = x^4 + 3x^2z^2 - 4xyz & \text{b) } f(x, y, z) = 4xye^z + \frac{x}{2y} - \sqrt{x^2z + 3y^2} \\ \text{c) } f(x, y, z) = \exp\left(-\frac{y^2}{2x}\right) + \sin(xz) & \text{d) } f(x, y, z) = \log\left(\frac{x+2z^2}{3z\sqrt{y}}\right) \end{array}$$

10.18. Calculeu les derivades de les funcions següents:

$$\text{a) } \frac{dz}{dt} \text{ si } z = f(t \sin(t), e^{2t}) \text{ amb } f \text{ diferenciable}$$

$$\text{b) } \frac{du}{dt} \text{ si } u = x^2 + 2y^2, \quad x = \sin(2t), \quad y = \exp(2x^2)$$

$$\text{c) } D_u z, D_v z \text{ si } z = f(x, y) \text{ amb } f \text{ diferenciable i } x = 2uv, \quad y = \frac{u}{3v}$$

10.19. Demostreu que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció derivable i es considera la funció $z = f(x + ay)$, $a \in \mathbb{R}$ aleshores es compleix la relació

$$D_y z = a D_x z$$

10.20. Demostreu que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció derivable i es considera la funció $z = yf(x^2 - y^2)$ aleshores es compleix la relació

$$\frac{1}{x} D_x z + \frac{1}{y} D_y z = \frac{z}{y^2}$$

10.21. Es considera la funció $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x, y) = \begin{cases} x(2y+1), & y \geq 0 \\ x(1-x) - y^2, & y < 0 \end{cases}$.

- 1) Calculeu les derivades parcials de la funció en el punt $(0, 0)$.
- 2) Estudieu la diferenciabilitat de la funció en el punt $(0, 0)$.
- 3) Calculeu la variació de la funció en el punt $(0, 0)$ al llarg de la recta d'equació $2x + y = 0$.
- 4) Es considera la superfície $z = f(x, y)$; calculeu l'equació del pla tangent a aquesta superfície en el punt $(0, 0, 0)$ i calculeu l'angle que forma el vector director d'aquest pla amb l'eix OX .